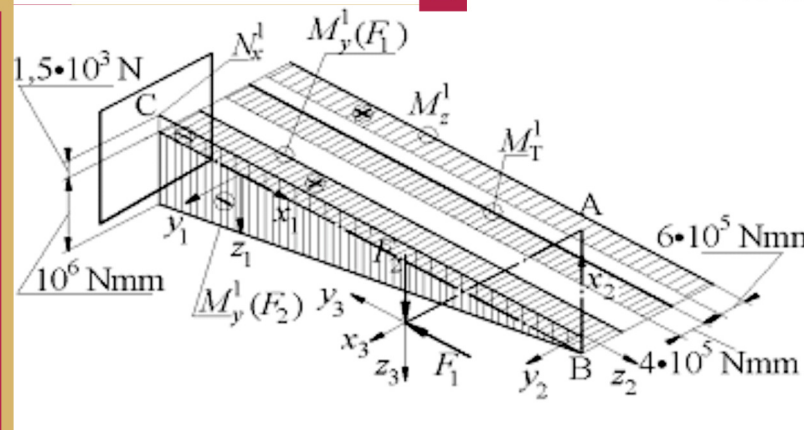
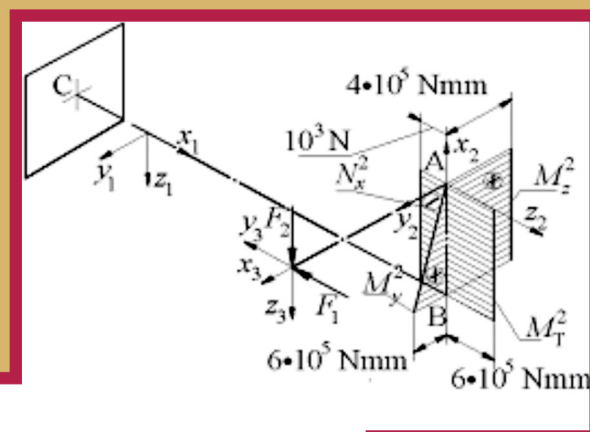
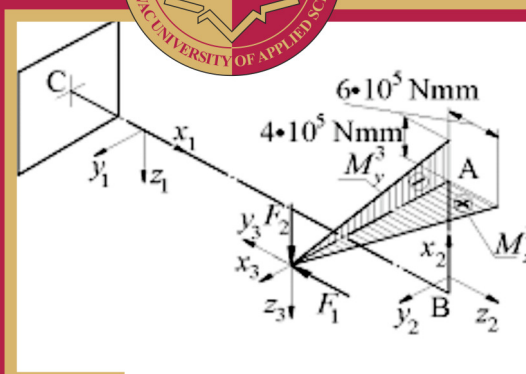




$$\left| r^2 = y_3^2 + z_3^2 \rightarrow y_3 = \pm \sqrt{r^2 - z_3^2} \right| \sigma_x = \frac{F_1 L_3}{I} z_3 - \frac{F_2 L_3}{I} \sqrt{r^2 - z_3^2} \left| \frac{d}{dz_3} \right| = 0 \Rightarrow \frac{F_1 L_3}{I} - \frac{F_2 L_3}{I} \frac{1}{2} \frac{-2z_3}{\sqrt{r^2 - z_3^2}} = 0.$$

$$\frac{z_3}{\sqrt{r^2 - z_3^2}} = -\frac{F_1}{F_2} \Rightarrow \frac{z_3^2}{r^2 - z_3^2} = \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 \Rightarrow z_3^2 \left(1 + \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right) = r^2 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2.$$

$$z_3^2 = r^2 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 \frac{F_2^2}{F_2^2 + F_1^2} = r^2 \frac{F_1^2}{F_2^2 + F_1^2} \Rightarrow z_3 = \pm r \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}}; y_3 = \pm \sqrt{r^2 - z_3^2} \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} = \pm r \frac{F_2}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}}.$$

▼ Josip Hoster,
CVRSTOČA II

ISBN 978-953-7343-95-8

Izdavač: Veleučilište u Karlovcu

Za izdavača: dr. sc. Branko Wasserbauer, prof. v. š.

Recenzenti: doc. dr. sc. Tomislav Jarak, doc. dr. sc. Ivica Skozrit, prof. dr. sc. Zdenko Tonković

Grafička priprema: Miroslav Kodrić

Objavljivanje ovog veleučilišnog udžbenika odobrilo je Povjerenstvo za izdavačku djelatnost Veleučilišta u Karlovcu Odlukom o izdavanju publikacije br. 7.5-13-2017-4

dr. sc. Josip Hoster, dipl. ing.

ČVRSTOĆA II

Podloge za predavanja i vježbe

Veleučilište u Karlovcu, 2017.

Sadržaj

Popis oznaka	7
Predgovor	13
1. SAVIJANJE TANKIH RAVNIH NOSAČA – ODREĐIVANJE PROGIBA I KUTA NAGIBA ELASTIČNE LINIJE	15
1.1. Diferencijalna jednačba elastične linije.....	15
1.2. Metoda analogne grede	23
2. RJEŠAVANJE STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA	30
2.1. Princip opisivanja statičkim nosačem	32
3. IZVIJANJE RAVNIH ŠTAPOVA – GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI.....	39
3.1. Eulerova kritična sila izvijanja.....	40
3.2. Tetmayerova kritična sila izvijanja	42
4. SLOŽENO OPTEREĆENJE	51
4.1. Savijanje i osno opterećenje	51
4.2. Savijanje i uvijanje okruglih štapova	53
4.3. Opći slučaj opterećenja okruglih štapova.....	57
5. TEORIJE ČVRSTOĆE	62
5.1. Energija deformiranja.....	62
5.2. Distorzijska i dilatacijska energija	63
5.3. Teorija najvećeg normalnog naprezanja.....	63
5.4. Teorija najveće duljinske deformacije	64
5.5. Teorija najvećeg posmičnog naprezanja	65
5.6. Teorija najveće distorzijske energije.....	65
6. DINAMIČKA ČVRSTOĆA	81
6.1. Ciklus naprezanja	82
6.2. Wöhlerov dijagram.....	83
6.3. Haighov dijagram.....	84
6.4. Smithov dijagram	85
6.5. Koncentracija naprezanja. Dopusšteno naprezanje.....	85
6.6. Dimenzioniranje dinamički opterećenih strojnih dijelova	89
6.6.1. Proporcionalno opterećenje.....	89
6.6.2. Neproporcionalno opterećenje	90
Dodatak A	97
Kazalo pojmova	105
Popis slika i tablica	107
Literatura	111

Popis oznaka

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
a , mm	duljina dijela nosača, karakteristični radijus prijelaza mjerodavan za zareznu osjetljivost za neki materijal
A , mm ²	ploština poprečnog presjeka nosača
b , mm	širina profila, širina poprečnog presjeka
c , mm	duljina dijela nosača
C , mm	konstanta integracije
C_1 , mm ⁻³	konstanta nakon prvog koraka integracije
C_2 , mm ⁻²	konstanta nakon drugog koraka integracije
C_3 , mm ⁻¹	konstanta nakon trećeg koraka integracije
C_4 , mm	konstanta nakon četvrtog koraka integracije
d , mm	promjer osovine, vratila, duljina dijela nosača
d_u , mm	unutrašnji promjer cijevi
ds , mm	diferencijal lučne mjere duljine
dU , J	diferencijal unutrašnje energije
dV , m ³	diferencijal volumena
dw , mm	diferencijal progiba
dW , J	diferencijal rada
dx , mm	diferencijal koordinate
dy , mm	diferencijal koordinate
dz , mm	diferencijal koordinate
$\frac{dw}{dx}$	derivacija progiba, nagib tangente
$\frac{d^2w}{dx^2}$	druga derivacija progiba, zakrivljenost krivulje
D , mm	promjer remenice, tarenice, vanjski promjer cijevi
D_1 , mm	promjer remenice 1
D_2 , mm	promjer remenice 2
$d\alpha$, rad	diferencijal kuta
e , mm	udaljenost težišnice presjeka od pravca djelovanja sile
E , N/mm ²	modul elastičnosti
f_s	faktor sigurnosti pri dinamičkom naprezanju
f_1	funkcija ovisnosti najmanjeg dopuštenog naprezanja o srednjem naprezanju
f_2	funkcija ovisnosti najvećeg dopuštenog naprezanja o srednjem naprezanju
F , N	sila
$F(t)$, N	vremenski promjenjiva sila
F_a , N	amplituda vremenski promjenjive sile (pri dinamičkom opterećenju)
F_B , N	sila na mjestu B na nosaču
F_{dop} , N	dopuštena sila pri izvijanju štapa
F_{kr} , N	kritična sila pri izvijanju štapa
F_m , N	srednja vrijednost vremenski promjenjive sile (pri dinamičkom opterećenju)
$(F_o)_1$, N	obodna sila na remenici 1

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
$(F_o)_2, N$	obodna sila na remenici 2
F_R, N	reaktivna sila pri izvijanju štapa uslijed temperaturnog širenja
F_z, N	sila na pravcu osi z
F_0, N	sila koja djeluje na nosač
F_1, N	sila koja djeluje na štap
F_2, N	sila koja djeluje na štap
F_A^y, N	reakcija u ležaju A na pravcu osi y
F_A^z, N	reakcija u ležaju A na pravcu osi z
F_D^y, N	reakcija u ležaju D na pravcu osi y
F_D^z, N	reakcija u ležaju D na pravcu osi z
F_{Az}^*, N	fiktivna reakcija na analognom nosaču u osloncu A na pravcu osi z
h, mm	visina presjeka nosača
i_{min}, mm	minimalni radijus tromosti poprečnog presjeka nosača, štapa
I, mm^4	aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača
I_{min}, mm^4	minimalni aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača, štapa
I_y, mm^4	aksijalni moment tromosti površine poprečnog presjeka nosača, štapa, prema osi y
I_p, mm^4	polarni moment tromosti površine poprečnog presjeka štapa
k_1	faktor površinske hrapavosti za dinamičku čvrstoću
k_2	faktor veličine presjeka za dinamičku čvrstoću
l, mm	duljina štapa pri izvijanju
l_0, mm	slobodna duljina izvijanja
L, mm	duljina nosača
L_1, mm	duljina ravnog dijela nosača
L_2, mm	duljina ravnog dijela nosača
M, Nmm	moment savijanja na štapu
M_B, Nmm	moment savijanja oko osi y na štapu u točki B
$M_{B,ret}, Nmm$	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku B
M_C, Nmm	moment savijanja oko osi y na štapu u točki C
M_0, Nmm	moment savijanja na nosaču
$M_{rez,1}, Nmm$	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku 1
$M_{rez,2}, Nmm$	rezultirajući moment savijanja oko osi y na štapu na presjeku 2
M_T, Nmm	moment uvijanja
M_y, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu
M_{y1}, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu na presjeku 1
M_{y2}, Nmm	moment savijanja oko osi y u štapu na presjeku 2
M_z, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu
M_{z1}, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu na presjeku 1
M_{z2}, Nmm	moment savijanja oko osi z u štapu na presjeku 2
M_{y3}^A, Nmm	moment savijanja oko osi y prema točki A na dijelu konstrukcije 3
M_{z3}^A, Nmm	moment savijanja oko osi z prema točki A na dijelu konstrukcije 3
M_s^A, Nmm	moment savijanja u točki A
M_s^C, Nmm	moment savijanja u točki C

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
M_T^C , Nmm	moment uvijanja u točki C
M_{ekv}^C , Nmm	ekvivalentni moment u točki C
M_s^a , Nmm	amplituda momenta savijanja pri dinamičkom naprezanju
M_T^a , Nmm	amplituda momenta uvijanja pri dinamičkom naprezanju
M_s^m , Nmm	srednja vrijednost momenta savijanja pri dinamičkom naprezanju
M_T^m , Nmm	srednja vrijednost momenta uvijanja pri dinamičkom naprezanju
M^* , mm	fiktivni moment na analognom nosaču
M_A^* , mm	fiktivni moment na analognom nosaču u točki A
M_B^* , mm	fiktivni moment na analognom nosaču u točki B
n	broj poluvalova sinusode
n , min ⁻¹	brzina vrtnje rotora
N	broj ciklusa opterećenja pri dinamičkom naprezanju
p , Pa	tlak fluida u cijevi
P , W	snaga koju prenosi vratilo
r	faktor asimetričnosti ciklusa naprezanja pri dinamičkom naprezanju
r , mm	prijelazni radijus na štapu pri dinamičkom naprezanju, udaljenost od neutralne osi pri savijanju
r_1 , mm	radijus remenice 1
r_2 , mm	radijus remenice 2
R_b , μm	visina brazde na površini obrađenog dijela
q	faktor zarezne osjetljivosti materijala pri dinamičkom naprezanju
q_z , N/mm	raspodijeljeno opterećenje na nosaču
q_0 , N/mm	zadana vrijednost raspodijeljenog opterećenja na nosaču
q^* , mm ⁻¹	raspodijeljeno opterećenje analogne grede
Q_z , N	poprečna sila na presjeku nosača
Q^*	poprečna fiktivna sila analogne grede
Q_{Az}^*	poprečna fiktivna sila u točki A analogne grede na presjeku
Q_B^*	poprečna fiktivna sila u točki B analogne grede na presjeku
s , mm	krivocrtna duljinska mjera, debljina stijenke cijevi
S	faktor sigurnosti pri izvijanju
t , s	vrijeme
T , Nmm	moment uvijanja na štapu
U , J	energija deformiranja
U_{0d} , J	gustoća energije deformiranja
V , m ³	volumen
w , mm	progib nosača
w_A , mm	progib nosača u točki A
w_{max} , mm	najveći progib nosača
$w_B^{q_0}$, mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja raspodijeljenog opterećenja q_0
w_B^F , mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja sile F
w_B^M , mm	progib nosača u točki B uslijed djelovanja sprega M
W , J	rad naprezanja na elementarnom volumenu materijala

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
W, mm^3	aksijalni moment otpora poprečnog presjeka nosača
W_p, mm^3	polarni moment otpora poprečnog presjeka nosača
z, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu
x, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu
y, mm	koordinata u Descarteovom koordinatnom sustavu
α	kut zakreta tangente na elastičnu liniju
α, K^{-1}	koeficijent temperaturnog širenja materijala
$\alpha_{\max}$	najveći kut zakreta tangente na elastičnu liniju
α_k	faktor koncentracije naprezanja
$\alpha_{k,ef}$	efektivni faktor koncentracije naprezanja
$\alpha_{k,t}$	teorijski, geometrijski faktor koncentracije naprezanja
α_A	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki A
α_B	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B
$\alpha_B^{q_0}$	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja raspodijeljenog opterećenja q_0
α_B^F	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja sile F
α_B^M	kut zakreta tangente na elastičnu liniju u točki B uslijed djelovanja sprega M
γ_{xy}	kutna deformacija
γ_{yz}	kutna deformacija
γ_{zx}	kutna deformacija
$\Delta F, \text{N}$	promjena sile
$\Delta L^F, \text{mm}$	promjena duljine štapa uslijed djelovanja sile
$\Delta L^\vartheta, \text{mm}$	promjena duljine štapa uslijed promjene temperature
$\Delta \vartheta, ^\circ\text{C}$	promjena temperature
ε_x	duljinska deformacija u smjeru osi x
ε_y	duljinska deformacija u smjeru osi y
ε_z	duljinska deformacija u smjeru osi z
ε_{dop}	dopuštena duljinska deformacija
$\vartheta, ^\circ\text{C}$	relativna temperatura u stupnjevima Celzijusa
κ, m^{-1}	zakrivljenost elastične linije nosača
λ	vitkost štapa pri izvijanju
λ_p	granična vitkost štapa pri izvijanju pri granici elastičnosti (Eulerova hiperbola)
λ_T	granična vitkost štapa pri izvijanju na granici Tetmayerovog pravca
ν	Poissonov faktor
ρ, m	radijus zakrivljenosti elastične linije nosača
$\sigma_a, \text{N/mm}^2$	amplituda dinamičkog naprezanja
$\sigma_{\text{dop}}, \text{N/mm}^2$	dopušteno naprezanje
$\sigma_e, \text{N/mm}^2$	naprezanje pri granici elastičnosti (plastičnog tečenja)

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
σ_{ekv} , N/mm ²	ekvivalentno naprezanje pri složenom stanju naprezanja
σ_{kr} , N/mm ²	kritično naprezanje pri izvijanju štapa
σ_m , N/mm ²	srednja vrijednost dinamičkog naprezanja
σ_M , N/mm ²	statička čvrstoća (pri rastezanju, „vlačna“ čvrstoća)
σ_{max} , N/mm ²	najveće naprezanje, najveće dinamičko naprezanje
σ_{min} , N/mm ²	najmanje dinamičko naprezanje
σ_p , N/mm ²	naprezanje (granica) proporcionalnosti
σ_T , N/mm ²	naprezanje na granici Tetmayerovog pravca pri izvijanju štapa
σ_x , N/mm ²	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi x
σ_y , N/mm ²	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi y
σ_z , N/mm ²	normalna komponenta naprezanja u smjeru osi z
σ_0 , N/mm ²	karakteristično naprezanje pri izvijanju štapa
σ_1 , N/mm ²	najveće glavno naprezanje
σ_2 , N/mm ²	srednje glavno naprezanje
σ_3 , N/mm ²	najmanje glavno naprezanje
$\sigma_{a,ekv}$, N/mm ²	amplituda ekvivalentnog naprezanja pri dinamičkom naprezanju
$\sigma_{m,ekv}$, N/mm ²	srednja vrijednost ekvivalentnog naprezanja pri dinamičkom naprezanju
$\sigma_{xB,max}$, N/mm ²	najveće normalno naprezanje u točki B
σ_{-1}^d , N/mm ²	dinamička (trajna) čvrstoća za izmjenični ciklus naprezanja
$\sigma_{r(N)}^d$, N/mm ²	vremenska čvrstoća za ciklus faktora asimetričnosti „r“, pri „N“ ciklusa naprezanja
$\sigma_r^{d,x}$, N/mm ²	dinamička (trajna) čvrstoća za ciklus faktora asimetričnosti „r“, za „x“ vrstu (oblik) opterećenja
$\sigma_{ekv,NPN}^B$, N/mm ²	ekvivalentno naprezanje u točki B prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja
$\sigma_{r,dop}^{d,x}$, N/mm ²	dopušteno najveće naprezanje za ciklus faktora asimetričnosti „r“, za „x“ vrstu (oblik) opterećenja
$(\sigma_x^1)^a$, N/mm ²	normalno naprezanje na prvom dijelu štapa
$(\sigma_x^2)^a$, N/mm ²	normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
$(\sigma_x^3)^a$, N/mm ²	normalno naprezanje na trećem dijelu štapa
$(\sigma_x^1)'_{max}$, N/mm ²	najveće normalno naprezanje na prvom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$(\sigma_x^1)'_{min}$, N/mm ²	najmanje normalno naprezanje na prvom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$(\sigma_x^2)'_{max}$, N/mm ²	najveće normalno naprezanje na drugom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$(\sigma_x^2)'_{min}$, N/mm ²	najmanje normalno naprezanje na drugom dijelu štapa samo uslijed savijanja
$(\sigma_x^1)_{max}$, N/mm ²	najveće normalno naprezanje na prvom dijelu štapa
$(\sigma_x^1)_{min}$, N/mm ²	najmanje normalno naprezanje na prvom dijelu štapa

Oznaka, mjerna jedinica	Opis
$(\sigma_x^2)_{\max}$, N/mm ²	najveće normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
$(\sigma_x^2)_{\min}$, N/mm ²	najmanje normalno naprezanje na drugom dijelu štapa
σ_φ , N/mm ²	cirkularno (u „kružnom“ smjeru) naprezanje u stijenci cijevi
$\tau_{\max}$, N/mm ²	najveće posmično naprezanje uslijed uvijanja (torzije)
$\tau_{\text{TB},\max}$, N/mm ²	najveće posmično naprezanje uslijed uvijanja (torzije) u točki B
τ_{xy} , N/mm ²	posmična komponenta naprezanja
τ_{yz} , N/mm ²	posmična komponenta naprezanja
τ_{zx} , N/mm ²	posmična komponenta naprezanja
ω , m ⁻¹	karakteristična veličina jednačbe ravnoteže pri izvijanju štapa
Ω , s ⁻¹	kružna frekvencija uzbudne sile pri dinamičkom naprezanju

Predgovor

Ove podloge za predavanja i vježbe su nastale na osnovi plana kolegija *Čvrstoća II* iz 2013. Veleučilišta u Karlovcu. Konceptualno je ovaj rukopis temeljen na udžbeniku prof. dr. sc. Ive Alfirevića, profesora na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Velika razlika je u odabranim originalnim numeričkim primjerima koji prate teorijske osnove. Uz to, sadržaj pojedinih poglavlja prilagođen je planu kolegija *Čvrstoća II* koji autor predaje na Veleučilištu u Karlovcu. Uz taj udžbenik, značajan utjecaj na nastajanje i pisanje ovog djela je autorovo iskustvo u nastavi na Katedri za mehaniku i čvrstoću Fakulteta strojarstva i brodogradnje. Suradnja sa svim nastavnicima Katedre za mehaniku i čvrstoću i Zavoda za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje je uvelike doprinijela nastavnoj djelatnosti autora, a time i nastajanju ovog djela.

U skripti su prikazane teorijske osnove savijanja tankih nosača, rješavanja statički neodređenih ravnih nosača, izvijanja ravnih štapova, složenih opterećenja ravnih štapova, teorija čvrstoće i dinamičke čvrstoće. Uz teorijske osnove prikazani su i riješeni zadaci koji prate gradivo. Teorija prikazana u prvih pet poglavlja ovog teksta predstavlja odabrana temeljna znanja iz područja čvrstoće, dok je šesto poglavlje sažetak znanja iz područja dinamičke čvrstoće, ili ponekad nazvane pogonske čvrstoće. Prvih pet poglavlja se konceptualno temelji na udžbeniku prof. dr. sc. Ive Alfirevića, no opseg sadržaja je smanjen i prilagođen planu kolegija *Čvrstoća II* Veleučilišta u Karlovcu. Numerički primjeri su osmišljeni tako da posluže čitatelju provjeriti usvojene teorijske postavke u pojedinom poglavlju. Šesto poglavlje je konceptualno temeljeno na 8. poglavlju o dinamičkoj čvrstoći u udžbeniku *Nauka o čvrstoći II* autora prof. dr. sc. Josipa Brnića i prof. dr. sc. Gorana Turkalja s Tehničkog fakulteta Sveučilišta u Rijeci, te mnogih izvora s internetskih stranica.

U prvom poglavlju *Savijanje tankih ravnih nosača* prikazana je analiza izvođenja diferencijalne jednadžbe elastične linije ravnih nosača, te primjena integriranja te jednadžbe za određivanje oblika elastične linije. Uz to opisana je metoda analogne grede za određivanje progiba ili nagiba u pojedinim točkama statički određenih nosača. U prikazanim numeričkim primjerima su obrađeni određivanje progiba i kuta nagiba elastične linije grede integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije, te progiba i nagiba u pojedinim točkama metodom analogne grede.

U drugom poglavlju *Statički neodređeni nosači* prikazan je način određivanja jednadžbe elastične linije i deriviranjem te jednadžbe izračun momenta savijanja (momentnog dijagrama) statički neodređenih nosača. Prikazana je primjena principa superpozicije za određivanje reakcija u osloncima pomoću tabličnih izraza za progib i nagib tangente elastične linije u pojedinim točkama nosača. Prikazani su numerički primjeri statički neodređenih nosača u kojima je izračunat momentni dijagram integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije i primjenom principa superpozicije korištenjem tabličnih izraza za progib i nagib u određenim točkama nosača.

U trećem poglavlju *Izvijanje ravnih štapova* prikazana je analiza kritične sile pri izvijanju ravnih štapova oslonjenih na svojim krajevima. Prikazane su jednadžbe proračuna kritične sile, odnosno naprezanja, prema Euleru i Tetmayeru. U prikazanim numeričkim primjerima su prikazani proračuni izvijanja štapova spojenih s konstrukcijom, tako da time čitatelj dobiva uvid u proračun dijelova konstrukcije promatranih zasebno.

U četvrtom poglavlju *Složeno opterećenje*, koje je povezano tematski s petim poglavljem, *Teorije čvrstoće* prikazan je način određivanja unutrašnjih veličina u nosaču; uzdužne i poprečne unutrašnje sile, te unutrašnjih momenata uvijanja i savijanja. Na osnovi poznavanja raspodjele unutrašnjih veličina odabire se kritični presjek ili presjeci koji služe za dimenzioniranje nosača.

Nadalje su u poglavlju *Teorije čvrstoće* izložene četiri teorije čvrstoće. Izložene su teorija najvećeg normalnog naprezanja, teorija najveće duljinske deformacije, teorija najvećeg posmičnog naprezanja i teorija najveće distorzijske energije. Analizirani su slučajevi složenih opterećenja; osnog opterećenja i savijanja, savijanja i uvijanja te osnog opterećenja, unutrašnjeg tlaka, momenta savijanja i momenta uvijanja u tankostjenoj cijevi. Prikazan je primjer proračuna tzv. idealnog vratila.

U šestom poglavlju *Dinamička čvrstoća* prikazane su teorijske osnove dimenzioniranja strojnih elemenata koji su opterećeni dinamički. Opisan je način dimenzioniranja u slučaju kada je samo jedna značajna komponenta naprezanja koja se vremenski mijenja, tzv. proporcionalno opterećenje, na primjeru osovine koja rotira opterećena poprečnom silom, i slučaj tzv. neproporcionalnog opterećenja, kada postoji više

komponenata naprezanja, te se pravci glavnih naprezanja mijenjaju u ciklusu naprezanja, na primjeru vratila koje prenosi snagu rotirajući opterećeno i poprečnim silama.

U prilogu A prikazani su dijagrami faktora koncentracije naprezanja za razne oblike geometrijskih diskontinuiteta u strojnim elementima, kao i jednačbe kojima se izračunavaju faktori koncentracije naprezanja za razne geometrije strojnih elemenata s različitim geometrijskim diskontinuitetima.

Nakana ovih podloga za predavanja i vježbe je olakšati studentima, prvenstveno Veleučilišta u Karlovcu, praćenje nastave iz kolegija *Čvrstoća II*, te uključujući stručnjake samostalno učenje i usvajanje gradiva, i primjenu izloženih teorijskih postavki u dimenzioniranju strojnih dijelova. Svrha riješenih primjera je ponuditi numeričke primjere kao način primjene prikazanih teorijskih osnova te potaknuti na provjeru usvojenih znanja.

Ovom prigodom želim zahvaliti matičnoj instituciji Veleučilištu u Karlovcu, prvenstveno dekanu dr. sc. Branku Wasserbaueru, prof. v. š., na potpori u nastanku i promicanju korištenja u nastavi ovog djela. Zahvaljujem mentoru mog doktorskog rada prof. dr. sc. Jurici Soriću koji mi je značajno pomogao oblikovati nastavnu i znanstvenu djelatnost. Zahvaljujem i svim kolegicama i kolegama s Katedre za mehaniku i čvrstoću i Zavoda za tehničku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu na savjetima, potpori i pomoći.

Autor

1. SAVIJANJE TANKIH RAVNIH NOSAČA – ODREĐIVANJE PROGIBA I KUTA NAGIBA ELASTIČNE LINIJE

1.1. Diferencijalna jednadžba elastične linije

Za opisivanje i izvođenje jednadžbi za savijanje tankih štapova koristimo desni Descartesov koordinatni sustav. Nosač je opterećen u ravnini Oxz , odnosno, pomaci štapa, koje zovemo progibi, koji su okomiti na početnu nedeformiranu središnju liniju su u ravnini Oxz . Uslijed opterećenja uzdužna os štapa postaje zakrivljena i naziva se elastična linija. Pomaci točaka presjeka u i v u pravcima osi x i y su zanemarivo mali u odnosu na pomak w u pravcu osi z kojeg nazivamo progib. Promatra se čisto savijanje, što znači da je moment savijanja konstantan po cijelom nosaču. Promatramo nosač jednolikog presjeka, od homogenog materijala, pa je pretpostavka da je svaki presjek nosača, ili svaki isječak infinitezimalne debljine pod jednakim uvjetima, pa je deformiranje, tj. zakrivljenost jednolika po cijelom nosaču. Pretpostavke o deformiranju i naprezanju [1] su:

- poprečni presjeci nakon deformiranja ostaju ravni i okomiti na elastičnu liniju,
- poprečni presjeci se ne deformiraju,
- vlada približno jednoosno stanje naprezanja; komponenta naprezanja σ_x je jedina različita od nule,
- pomaci i deformacije su dovoljno mali u odnosu na mjere štapa, $w_{\max} < h/10$.

Ograničenja za izraze za elastičnu liniju [1] su:

- visina savijanja h (mjera u ravnini opterećenja) malena je u usporedbi s rasponom l . Ako je omjer $l/h > 5$, greška je manja od 2%,
- najveći nagib tangente na elastičnu liniju $\alpha_{\max}$ je manji od 0,05 rad,
- razmatraju se pomaci na mjestima dovoljno udaljenim od krajeva štapa, oslonaca i mjesta djelovanja koncentriranih opterećenja. Dovoljna udaljenost je visina štapa h .

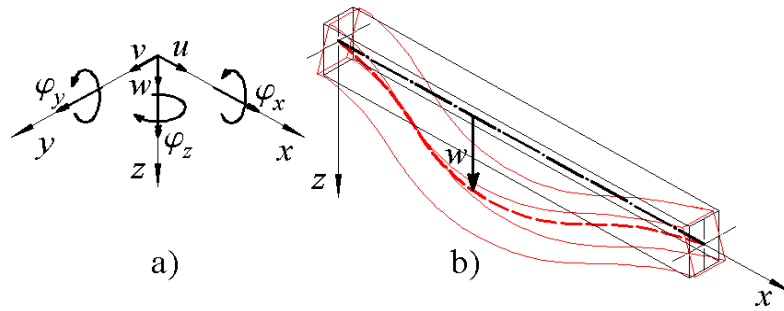
Zakrivljenost elastične linije κ , koja slijedi iz geometrijske analize, prema [1], je:

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}, \quad (1.1)$$

gdje su κ zakrivljenost elastične linije, α kut nagiba tangente na elastičnu liniju, s duljina krivulje, ρ radijus zakrivljenosti elastične linije, M_y unutrašnji moment savijanja oko osi y u nosaču, E modul elastičnosti i I_y aksijalni moment tromosti površine presjeka nosača. Pozitivan smisao kuta definiran je prema pravilu desnog vijka, kako je prikazano na Slici 1.1. Matematički točno opisana zakrivljenost funkcijom progiba je:

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.2)$$

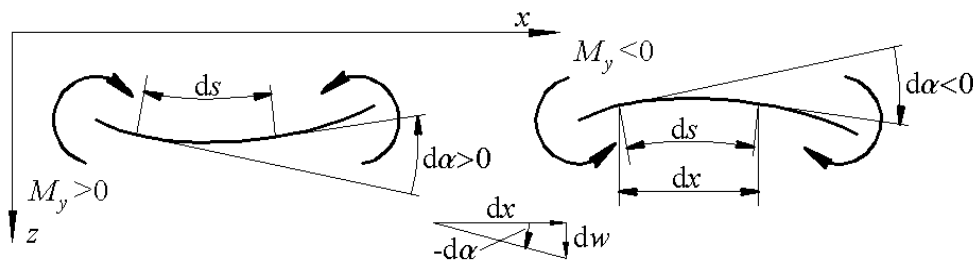
gdje je w progib nosača.



Slika 1.1. Opisivanje deformiranja nosača: a) koordinatni sustav nosača [1], b) pomak (progib) nosača

Uz ograničenje malih progiba i nagiba, pri čemu vrijedi da je $ds \approx dx$, iz (1.2) slijedi da se zakrivljenost može približno opisati sa:

$$\kappa = \pm \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (1.3)$$



Slika 1.2. Zakrivljenost elastične linije [1]

jer se u nazivniku (1.2) kvadrat prve derivacije, tj. kuta nagiba koji je mnogo manji od jedinice može zanemariti prema jedinici. Kut nagiba α je isto tako mnogo manji od jedinice (jednog radijana) pa se može približno odrediti iz:

$$-\alpha \approx \tan(-\alpha) = \frac{dw}{dx} \Rightarrow \alpha = -\frac{dw}{dx}. \quad (1.4)$$

Kombiniranjem (1.3) i (1.1) slijedi izraz koji povezuje moment savijanja (opterećenja koje djeluje u ravnini Oxz) i druge derivacije progiba prema:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad (1.5)$$

što je diferencijalna jednadžba elastične linije u ravnini Oxz . Integriranjem te jednadžbe i uvođenjem rubnih uvjeta moguće je odrediti jednadžbu elastične linije (ovisnost progiba o koordinati x). Jednadžba (1.5) je linearna jednadžba i vrijedi za statički određene probleme jer podrazumijeva poznavanje raspodjele momenta savijanja. Općenitiji slučaj, statički neodređenih nosača, povlači poznavanja rubnih uvjeta pomaka, pa diferencijalnu jednadžbu elastične linije dalje mijenjamo uvođenjem veze momenta savijanja s poprečnom silom $Q_z(x)$, i poprečnim raspodijeljenim opterećenjem $q_z(x)$. Čitatelj može naći detaljno objašnjenje o diferencijalnoj jednadžbi elastične linije u [1]. Iz Čvrstoće I je poznata veza između unutrašnje poprečne sile $Q_z(x)$ i unutrašnjeg momenta savijanja $M_y(x)$:

$$Q_z = \frac{dM_y}{dx}. \quad (1.6)$$

Poveznica vanjskog poprečnog raspodijeljenog opterećenja $q_z(x)$ i unutrašnje poprečne sile $Q_z(x)$ je diferencijalna jednadžba:

$$q_z = -\frac{dQ_z}{dx}. \quad (1.7)$$

Uvrštavanjem (1.6) u (1.5) slijedi:

$$\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -Q_z, \quad (1.8)$$

a uvrštavanjem (1.7) u (1.8) slijedi:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = q_z. \quad (1.9)$$

U slučaju da je $EI_y = \text{konst.}$ jednačba (1.9) se pojednostavljuje u:

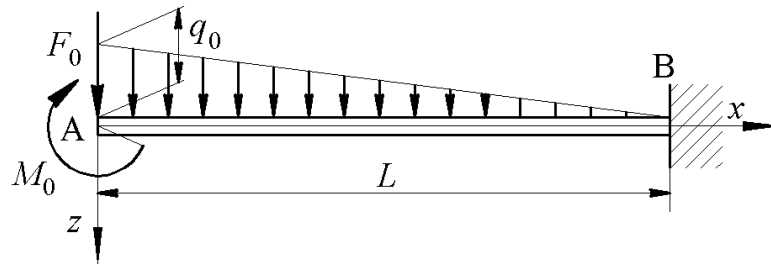
$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} = q_z. \quad (1.10)$$

Integriranjem jednačbe (1.10) četiri puta uz zadovoljavanje rubnih uvjeta sila (prirodni rubni uvjeti – sila i moment) i pomaka (osnovni rubni uvjeti – pomak i kut nagiba tangente) dobiva se jednačba progiba, odnosno elastične linije. U gornjim jednačbama veličinu EI_y možemo zvati savojna krutost, jer ukazuje na otpornost deformiranju pri savijanju, odnosno zakrivljenju nosača.

Primjer 1.1. Integriranje diferencijalne jednačbe elastične linije.

Za nosač zadan i opterećen prema Slici 1.3 potrebno je odrediti jednačbu elastične linije i odrediti najveći progib i nagib u toj točki. Zadano: $EI_y = \text{konst.}$, q_0 , F_0 , M_0 , L . Za određivanje najvećeg progiba uzeti

$$F_0 = q_0 L, M_0 = \frac{1}{2} q_0 L^2.$$



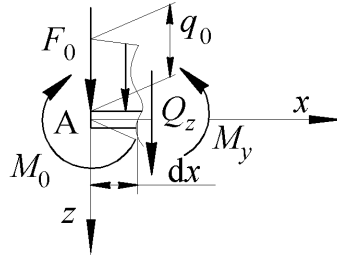
Slika 1.3. Konzolni nosač

Prema Slici 1.3 može se napisati jednačba raspodijeljenog opterećenja prema $q_z(x) = q_0(1 - x/L)$. U prvom koraku prikazat ćemo lijevu stranu jednačbe (1.10) kao derivaciju. Nadalje ćemo pomnožiti obje strane s diferencijalom, dx , te integrirati diferencijalnu jednačbu pa slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) &= q_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) / dx \Rightarrow d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = q_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx / \int dx. \\ \int d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) dx &= \int q_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) + C_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Integriranjem lijeve strane u (1.11), tj. diferencijala funkcije u zagradi slijedi da je integral sama funkcija jer su diferenciranje i integriranje inverzne operacije. U tom izrazu pojavljuje se izraz za unutrašnju poprečnu silu kako je opisano u (1.8) pa ćemo konstantu integracije C_1 odrediti iz rubnih uvjeta sila, odnosno iz zadanih poprečnih sila. Iz jednačbe ravnoteže dijela nosača prema Slici 1.4 slijedi da je unutrašnja poprečna sila na mjestu $x = 0$:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_0 + Q_z = 0 \Rightarrow Q_z = -F_0. \quad (1.12)$$



Slika 1.4. Unutrašnje veličine na lijevom rubu konzole

Kako je prema (1.8) funkcija $EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}$ negativna poprečna sila, tada za određivanje C_1 treba uzeti negativnu poprečnu silu određenu u (1.12). Slijedi:

$$F_0 = q_0 \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) \Big|_{x=0} + C_1 \Rightarrow F_0 = C_1. \quad (1.13)$$

Uvrštavanjem (1.13) u (1.11) dobivamo izraz za raspodjelu negativne unutrašnje poprečne sile:

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) + F_0. \quad (1.14)$$

Daljnjim integriranjem (1.14) slijedi:

$$d \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = \left[q_0 \left(x - \frac{x^2}{2L} \right) + F_0 \right] dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) + F_0 x + C_2. \quad (1.15)$$

Prema (1.5), (1.15) predstavlja jednadžbu momenta savijanja, pa ćemo konstantu integracije C_2 odrediti iz rubnog uvjeta momenta. Ponovno, prema Slici 1.4, iz ravnoteže momenata oko osi y slijedi:

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow -M_0 + M_y = 0 \Rightarrow M_y = M_0. \quad (1.16)$$

Funkcija na lijevoj strani (1.15) je negativna funkcija momenta savijanja, pa slijedi:

$$-M_0 = \left(q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) + F_0 x \right) \Big|_{x=0} + C_2 \Rightarrow C_2 = -M_0. \quad (1.17)$$

Uvrštavanjem C_2 u (1.15) slijedi raspodjela momenta savijanja po nosaču:

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) + F_0 x - M_0. \quad (1.18)$$

Daljnjim integriranjem (1.18) dobivamo jednadžbu kuta nagiba tangente:

$$d \left(EI_y \frac{dw}{dx} \right) = \left[q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) + F_0 x - M_0 \right] dx / \int dx. \quad (1.19)$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} \right) + F_0 \frac{x^2}{2} - M_0 x + C_3.$$

U jednadžbu (1.19) treba uvesti rubni uvjet koji opisuje kut nagiba tangente na elastičnu liniju u točki B jer je u toj točki uklještenje koje uvjetuje način deformiranja, tj. pomaci i rotacije su spriječeni. Slijedi

$$0 = q_0 \left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^4}{24L} \right) + F_0 \frac{L^2}{2} - M_0 L + C_3 \Rightarrow C_3 = M_0 L - F_0 \frac{L^2}{2} - q_0 \left(\frac{L^3}{8} \right). \quad (1.20)$$

Uvrštavanjem C_3 u (1.19) dobivamo funkciju kuta nagiba tangente:

$$EI_y \frac{dw}{dx} = q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} \right) + F_0 \frac{x^2}{2} - M_0 x + M_0 L - F_0 \frac{L^2}{2} - q_0 \left(\frac{L^3}{8} \right). \quad (1.21)$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} - \frac{L^3}{8} \right) + F_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) - M_0 (x - L).$$

Još jednom integriramo jednadžbu elastične linije i dobivamo jednadžbu progiba:

$$d(EI_y w) = \left[q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} - \frac{L^3}{8} \right) + F_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) - M_0 (x - L) \right] dx / \int dx. \quad (1.22)$$

$$EI_y w = q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120L} - \frac{xL^3}{8} \right) + F_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{xL^2}{2} \right) - M_0 \left(\frac{x^2}{2} - xL \right) + C_4.$$

Rubni uvjet za pomak (progib) je u uklještenju, točki B, iz čega možemo odrediti konstantu C_4 :

$$0 = q_0 \left(\frac{L^4}{24} - \frac{L^4}{120} - \frac{L^4}{8} \right) + F_0 \left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} \right) - M_0 \left(\frac{L^2}{2} - L^2 \right) + C_4. \quad (1.23)$$

$$C_4 = q_0 \left(\frac{11L^4}{120} \right) + F_0 \left(\frac{L^3}{3} \right) + M_0 \left(-\frac{L^2}{2} \right).$$

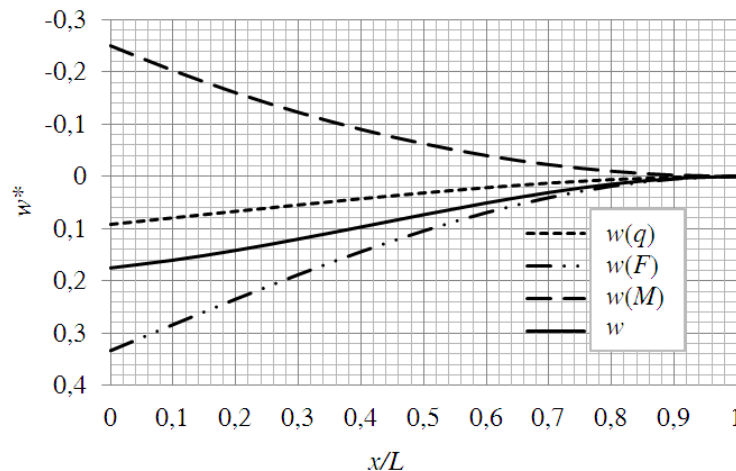
Uvrštavanjem (1.23) u (1.22) dobivamo funkciju progiba u obliku:

$$EI_y w = q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120L} - \frac{xL^3}{8} + \frac{11L^4}{120} \right) + F_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{xL^2}{2} + \frac{L^3}{3} \right) - M_0 \left(\frac{x^2}{2} - xL + \frac{L^2}{2} \right). \quad (1.24)$$

$$w = \frac{q_0 L^4}{EI_y} \left(-\frac{1}{120} \left(\frac{x}{L} \right)^5 + \frac{1}{24} \left(\frac{x}{L} \right)^4 - \frac{1}{8} \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{11}{120} \right) +$$

$$\frac{F_0 L^3}{EI_y} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{1}{3} \right) + \frac{M_0 L^2}{EI_y} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{1}{2} \right).$$

U donjoj jednadžbi (1.24) izraz za progib je malo preuređen kako bi se olakšalo crtanje elastične linije. Za predočavanje utjecaja svakog od opterećenja na elastičnu liniju, elastične linije pojedinih opterećenja nacrtane su različitim vrstama krivulja, i pri tome korištene zadane ovisnosti opterećenja; $F_0 = q_0 L$, $M_0 = q_0 L^2 / 2$. Uvrštavanjem ovih odnosa opterećenja u jednadžbu elastične linije dobivamo ukupni oblik deformirane elastične linije prema Slici 1.5. Na Slici 1.5. nacrtane su funkcije progiba podijeljene veličinom $q_0 L^4 / EI_y$ radi lakšeg crtanja, što nazivamo normirani progib.



Slika 1.5. Normirana funkcija progiba konzole

Iz jednadžbe (1.22) je vidljivo da spreg M_0 uzrokuje progib u obliku polinoma 2. stupnja, poprečna sila F_0 progib u obliku polinoma 3. stupnja a linearno promjenjivo raspodijeljeno opterećenje $q_z(x)$ progib u obliku polinoma 5. stupnja. Nadalje, da bi odredili najveći progib, postaviti ćemo uvjet da je prva derivacija funkcije progiba jednaka nuli:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{dw}{dx} &= q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} - \frac{L^3}{8} \right) + q_0 L \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) - \frac{1}{2} q_0 L^2 (x - L) = 0. \\ q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} \right) + q_0 L x - \frac{1}{2} q_0 L^2 &= 0 \Rightarrow q_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} + Lx - \frac{1}{2} L^2 \right) = 0. \\ -\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} + xL - \frac{1}{2} L^2 &= 0 \Rightarrow x \approx 0,424L. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Iz jednadžbe (1.25) dobivamo mjesto na nosaču gdje je maksimum progiba, pa vrijednost najvećeg progiba dobivamo uvrštavanjem izračunate koordinate u funkciju progiba, što daje:

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \frac{q_0 L^4}{EI_y} \left(-\frac{1}{120} (0,424)^5 + \frac{1}{24} (0,424)^4 - \frac{1}{8} (0,424) + \frac{11}{120} \right) + \\ &\frac{q_0 L^4}{EI_y} \left(\frac{1}{6} (0,424)^3 - \frac{1}{2} (0,424) + \frac{1}{3} \right) + \frac{q_0 L^4}{2EI_y} \left(-\frac{1}{2} (0,424)^2 + (0,424) - \frac{1}{2} \right) = \frac{q_0 L^4}{EI_y} 0,187825. \end{aligned} \quad (1.26)$$

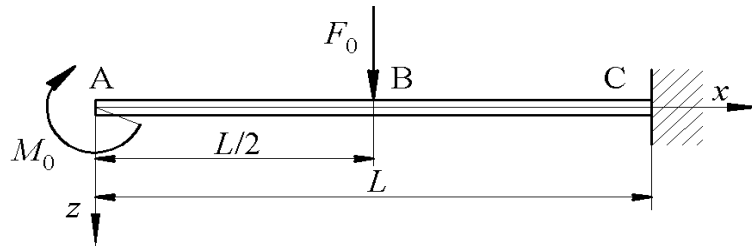
Nagib tangente na elastičnu liniju u toj točki nosača izračunavamo prema:

$$\begin{aligned} \alpha(x=0,424L) &= -\frac{dw}{dx}(x=0,424L) = \\ -q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L} - \frac{L^3}{8} \right) - q_0 L \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) + \frac{1}{2} q_0 L^2 (x - L) &= \frac{q_0 L^3}{EI_y} 0,235754. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Primjer 1.2. Integriranje diferencijalne jednadžbe elastične linije.

Za nosač zadan i opterećen prema Slici 1.6 potrebno je odrediti jednadžbu elastične linije. Zadano:

$$EI_y = \text{konst.}, F_0, M_0, L, M_0 = \frac{1}{2} F_0 L.$$



Slika 1.6. Konzolni nosač

Za ovaj nosač moment savijanja ima lom na mjestu djelovanja sile, stoga ćemo integrirati diferencijalnu jednadžbu elastične linije u dva područja. Moment savijanja od točke A do točke B jednak je:

$$x \in [0, L/2], M_y = M_0, \quad (1.28)$$

a moment od točke B do točke C jednak je:

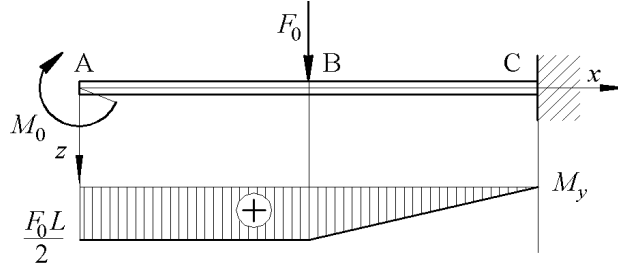
$$x \in [L/2, L], M_y = M_0 - F_0 (x - L/2). \quad (1.29)$$

Raspodjela momenta savijanja po nosaču je prikazana na Slici 1.7. Integriranjem diferencijalne jednadžbe elastične linije $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}$ dva puta dobivamo:

$$EI_y \frac{d^2 w^1}{dx^2} = -M_0 \Rightarrow d\left(EI_y \frac{dw^1}{dx}\right) = (-M_0) dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{dw^1}{dx} = -M_0 x + C_1.$$

$$EI_y \frac{dw^1}{dx} = -M_0 x + C_1 / \int dx \Rightarrow EI_y w^1 = -M_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow w^1 = \frac{1}{EI_y} \left(-M_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \right).$$
(1.30)

U gornjim jednadžbama je uvedena oznaka w^1 koja označava funkciju progiba za područje od točke A do točke B. Oznaku w^2 će označavati funkciju progiba za područje od točke B do točke C.



Slika 1.7. Raspodjela momenta savijanja

Nadalje, integriramo na području od točke B do točke C, pa slijedi:

$$EI_y \frac{d^2 w^2}{dx^2} = -\left(M_0 - F_0 \left(x - \frac{L}{2}\right)\right) \Rightarrow d\left(EI_y \frac{dw^2}{dx}\right) = -\left(M_0 - F_0 \left(x - \frac{L}{2}\right)\right) dx / \int dx.$$

$$EI_y \frac{dw^2}{dx} = -\left(M_0 x - F_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L}{2} x\right)\right) + C_3 / \int dx \Rightarrow EI_y w^2 = -\left(M_0 \frac{x^2}{2} - F_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{4} x^2\right)\right) + C_3 x + C_4. \quad (1.31)$$

$$w^2 = \frac{1}{EI_y} \left[-\left(M_0 \frac{x^2}{2} - F_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{L}{4} x^2\right)\right) + C_3 x + C_4 \right].$$

Rubni uvjeti za nosač su:

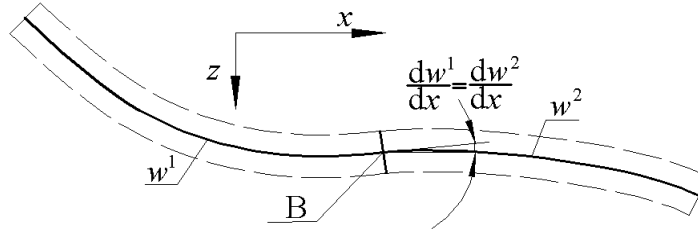
$$w(x=L) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(x=L) = 0. \quad (1.32)$$

Budući da imamo dva područja integracije, za određivanje konstanti integracije u obje funkcije progiba, w^1 i w^2 , potrebno je postaviti rubne uvjete za diferencijalne jednadžbe koje dobivamo postavljanjem uvjeta neprekidnosti nosača, tj. jednakosti progiba u točki B i nagiba tangente na elastičnu liniju, kako je prikazano na Slici 1.8., i rubnih uvjeta u uklještenju. Kada uvedemo rubni uvjet progiba u (1.32) i uvjete neprekidnosti funkcije progiba, dobit ćemo jednadžbu za progib:

$$w^1\left(\frac{L}{2}\right) = w^2\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{EI_y} \left(-M_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + C_1 \left(\frac{L}{2}\right) + C_2 \right) =$$

$$\frac{1}{EI_y} \left[-\left(M_0 \left(\frac{L}{2}\right)^2 \frac{1}{2} - F_0 \left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 \frac{1}{6} - \frac{L}{4} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right) \right) + C_3 \left(\frac{L}{2}\right) + C_4 \right]. \quad (1.33)$$

$$C_1 \left(\frac{L}{2}\right) + C_2 = F_0 \left(\frac{L^3}{24} \right) + C_3 \left(\frac{L}{2}\right) + C_4.$$



Slika 1.8. Neprekidnost funkcije i prve derivacije progiba

$$w^1\left(\frac{L}{2}\right) = w^2\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{EI_y} \left(-M_0 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2} + C_1 \left(\frac{L}{2} \right) + C_2 \right) =$$

$$\frac{1}{EI_y} \left[- \left(M_0 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2} - F_0 \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 \frac{1}{6} - \frac{L}{4} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \right) \right) + C_3 \left(\frac{L}{2} \right) + C_4 \right].$$

$$C_1 \left(\frac{L}{2} \right) + C_2 = F_0 \left(\frac{L^3}{24} \right) + C_3 \left(\frac{L}{2} \right) + C_4. \quad (1.34)$$

$$\frac{dw^1}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{dw^2}{dx} \left(\frac{L}{2} \right) \Rightarrow \frac{1}{EI_y} \left(-M_0 \left(\frac{L}{2} \right) + C_1 \right) =$$

$$\frac{1}{EI_y} \left[- \left(M_0 \left(\frac{L}{2} \right) - F_0 \left(\left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2} - \frac{L}{2} \left(\frac{L}{2} \right) \right) \right) + C_3 \right] \Rightarrow C_1 = F_0 \left(\frac{L^2}{8} \right) + C_3.$$

Nakon uvjeta neprekidnosti, rubni uvjeti nam daju još dvije jednadžbe:

$$w^2(L) = 0 \Rightarrow - \left(M_0(L)^2 \frac{1}{2} - F_0 \left((L)^3 \frac{1}{6} - \frac{L}{4} (L)^2 \right) \right) + C_3 L + C_4 = 0.$$

$$- \left(M_0 \frac{L^2}{2} + F_0 \frac{L^3}{12} \right) + C_3 L + C_4 = 0. \quad (1.35)$$

$$\frac{dw^2}{dx}(L) = 0 \Rightarrow - \left(M_0 L - F_0 \left((L)^2 \frac{1}{2} - \frac{L}{2} (L) \right) \right) + C_3 = 0 \Rightarrow M_0 L = C_3.$$

Rješavanjem sustava jednadžbi (1.34) i (1.35) dobivamo konstante integracije:

$$C_1 = F_0 \frac{3L^2}{8}; C_2 = -F_0 \frac{7L^3}{48}; C_3 = F_0 \frac{L^2}{2}; C_4 = -F_0 \frac{L^3}{6}. \quad (1.36)$$

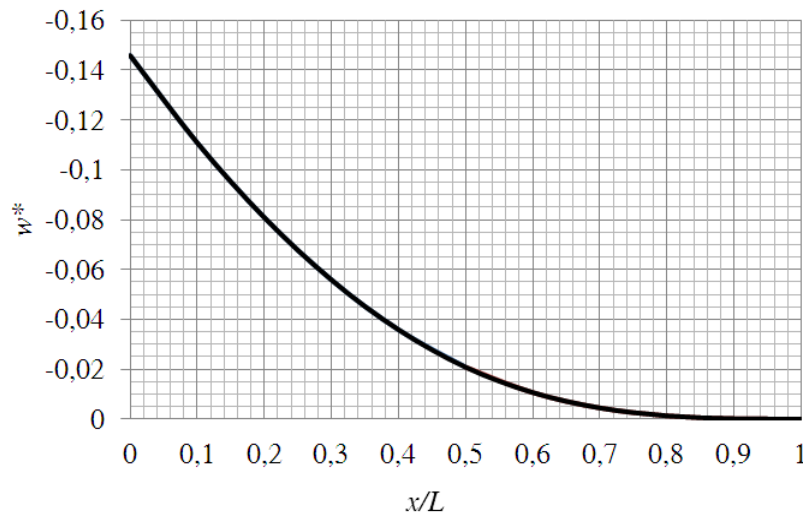
Uvrštavanjem izračunatih konstanti u funkcije progiba dobivamo konačno raspodjelu progiba po nosaču:

$$w^1 = \frac{F_0}{EI_y} \left[-\frac{Lx^2}{4} + \frac{3L^2x}{8} - \frac{7L^3}{48} \right], w^2 = \frac{F_0}{EI_y} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^2x}{2} - \frac{L^3}{6} \right]. \quad (1.37)$$

Radi lakšeg crtanja, funkcije progiba (1.37) zapisujemo izmijenjene na način:

$$w^1 = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{7}{48} \right], w^2 = \frac{F_0 L^3}{EI_y} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right) - \frac{1}{6} \right], \quad (1.38)$$

pa u dijagramu crtamo funkciju progiba podijeljenu s veličinom $F_0 L^3 / EI_y$, što se naziva normirani progib. Na Slici 1.9. prikazana je raspodjela normiranog progiba za zadani nosač.



Slika 1.9. Normirani progib konzole

1.2. Metoda analogne grede

Metoda analogne grede [1] je jednostavnija metoda za određivanje progiba i nagiba tangente na elastičnu liniju u konačnom skupu točaka nosača, za razliku od metode integriranja diferencijalne jednadžbe elastične linije koja daje funkciju za progib i nagib tangente za sve točke nosača. Metoda analogne grede je aritmetički brža samo ako se izračunavaju progib i nagib u malom broju točaka, npr. 2 točke. Integriranje diferencijalne jednadžbe je mnogo kompliciranije za relativno složene nosače. Metoda analogne grede se može primijeniti za statički određene nosače jer je temelj za izračun progiba i nagiba tangente poznavanje dijagrama momenta savijanja nosača.

Metoda analogne grede zasniva se na analogiji diferencijalnih jednadžbi koje povezuju raspodijeljeno opterećenje, poprečnu silu i moment savijanja q_z , Q_z i M_y i diferencijalnih jednadžbi koje povezuju progib, nagib i zakrivljenost w , α i κ . Te su jednadžbe napisane u stupcima

$$\begin{array}{ll}
 \frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z, & \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \\
 \frac{dM_y}{dx} = Q_z, & \frac{dw}{dx} = -\alpha, \\
 \frac{dQ_z}{dx} = -q_z, & \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{M_y}{EI_y}.
 \end{array} \quad (1.39)$$

U prvom redu jednadžbi (1.39) analogija je u veličinama w i M_y , jer su te dvije jednadžbe istog oblika, s različitim veličinama. Jednadžbe bi bile iste kada bi u lijevoj jednadžbi u prvom redu umjesto veličine M_y uvrstili w a na desnoj strani te desne jednadžbe stavili $M_y / (EI_y)$ umjesto q_z . Jednadžbe se rješavaju na isti način uz primjenu odgovarajućih analognih rubnih uvjeta. Isto vrijedi za druga dva reda jednadžbi u (1.39) gdje je analogija među veličinama α i Q_z .

Gore opisano znači da za izračunavanje progiba i/ili nagiba na nekom mjestu nosača umjesto rješavanja stvarne grede rješavamo fiktivnu gredu s raspodijeljenim fiktivnim opterećenjem $M_y / (EI_y)$ uz odgovarajuće rubne uvjete koji se određuju na osnovi analogije prikazane u (1.39). U skladu s analognim veličinama potrebno je uvesti rubne uvjete. Rubni uvjeti se postavljaju na mjestima gdje su progibi i/ili nagibi poznati, kako je prikazano na Slici 1.10. na sljedeći način:

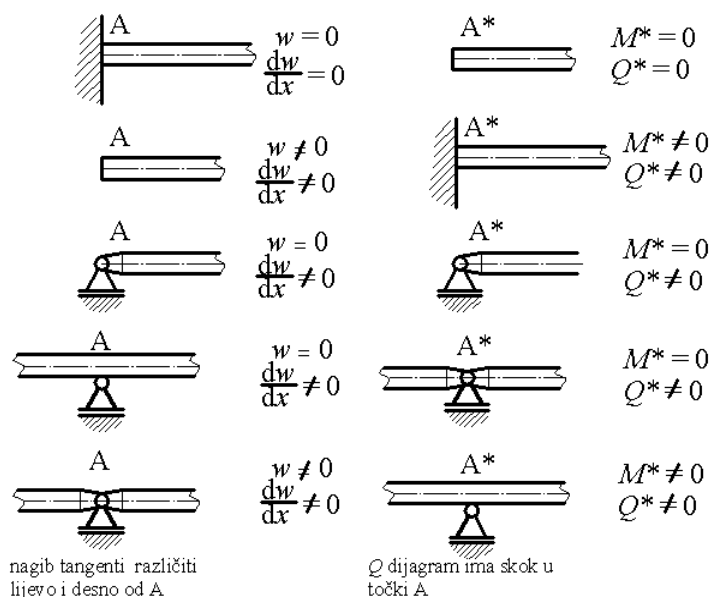
- ako je na stvarnoj gredi progib u nekoj točki jednak nuli, na fiktivnoj gredi u toj točki mora biti moment savijanja jednak nuli,

- ako je na stvarnoj gredi nagib u nekoj točki jednak nuli, na fiktivnoj gredi u toj točki mora biti poprečna sila jednaka nuli.

Možemo sažeto reći da se postupak rješavanja metodom analogne grede može zapisati po koracima:

1. Izračunati momentni dijagram stvarne grede.
2. Definirati fiktivnu gred: uvesti analogne rubne uvjete, tj. skicirati analognu gred ispod momentnog dijagrama stvarne grede. Analogna greda je opterećena raspodijeljenim opterećenjem $q^* = M_y / EI_y$. Ako je greda nepromjenjive savojne krutosti EI_y , možemo ispustiti pisanje te veličine do kraja rješavanja radi jednostavnosti.
3. Izračunati fiktivne momente M^* i poprečne sile Q^* u traženi točkama.
4. Analogijom je $w = M^*$, $\alpha = -Q^*$.

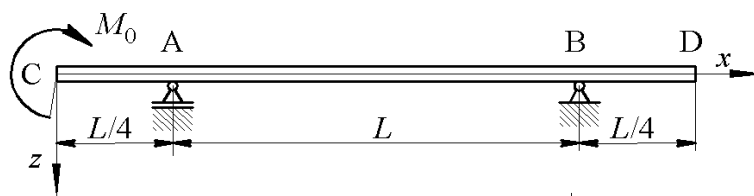
Budući da se metoda analogne grede zasniva na rješavanju diferencijalne jednačbe elastične linije, podliježe istim ograničenjima kao i sama diferencijalna jednačba. Najbitnije je da se ova metoda primjenjuje na nosače kod kojih je odnos visine i duljine $l/h > 5$ te su progibi mali, $w_{\max} / l < 0,01$. Uz takva je ograničenja greška manja od 2%.



Slika 1.10. Analogni rubni uvjeti

Primjer 1.3. Metoda analogne grede.

Za nosač zadan i opterećen prema Slici 1.11. potrebno je odrediti progib na mjestu djelovanja sprega M_0 , točki C, i nagib u lijevom zglobnom osloncu, točki A. Zadano: $EI_y = \text{konst.}$, M_0 , L .

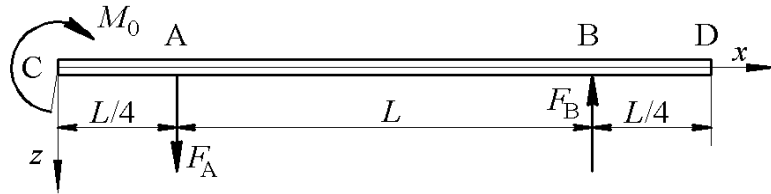


Slika 1.11. Greda opterećena spregom

Kao prvi korak u rješavanju ovog primjera odredit ćemo reakcije veza. Na Slici 1.12. ucrtane su pretpostavljene reakcije u osloncima. Reakcije veza ćemo odrediti pomoću dvije jednačbe ravnoteže

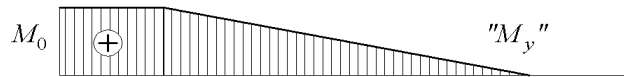
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_A = F_B.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_0 + F_A \frac{L}{4} - F_B \frac{5L}{4} = 0 \Rightarrow M_0 + F_A L = 0 \Rightarrow F_A = F_B = \frac{M_0}{L}.$$
(1.40)



Slika 1.12. Pretpostavljene reakcije grede

Momentni dijagram je prikazan na Slici 1.13.



Slika 1.13. Momentni dijagram grede

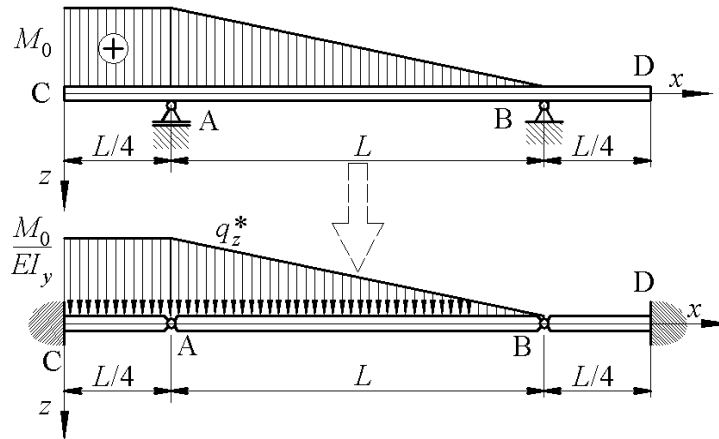
Idući korak je osigurati analogne rubne uvjete pomaka te analognoj gredi ucrtati analogno raspodijeljeno opterećenje, što je prikazano na Slici 1.14. Na Slici 1.14. zglobovi oslonci grede zamijenjeni su Gerberovim zglobovima na analognoj gredi, kako je prikazano na Slici 1.10. Razlog tome je što su progibi grede u osloncima jednaki nuli, dok su nagibi tangente na elastičnu liniju u općem slučaju različiti od nule. Analogni rubni uvjeti za slučaj kada je progib jednak nuli je moment jednak nuli, a nagib tangente na elastičnu liniju različit od nule znači da poprečna sila mora biti različita od nule, a to zadovoljavaju Gerberovi zglobovi. Progib na mjestu djelovanja sprega odredit ćemo izračunavanjem momenta savijanja analogne grede u presjeku C, a nagib tangente u točki A izračunavanjem unutrašnje poprečne sile u presjeku A. Izračunavanje tih veličina je opisano Slikom 1.15. Za određivanje reakcija analogne grede izračunat ćemo statičke ekvivalente analognog opterećenja prema

$$F_1^* = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{4}; F_2^* = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{2}.$$
(1.41)

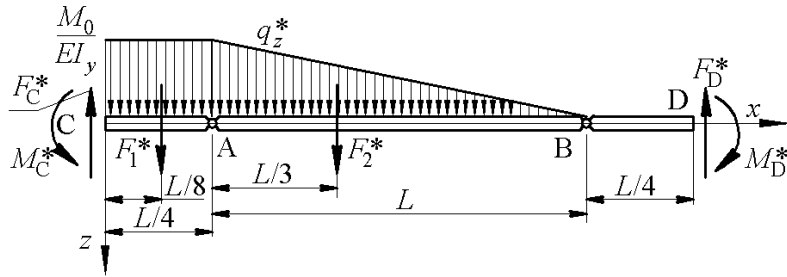
Razmatranjem ravnoteže središnjeg dijela analogne grede dobivamo reakcije u Gerberovim zglobovima, prema Slici 1.16.

$$\sum F_z^* = 0 \Rightarrow F_A' + F_B' = F_2^* = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{2}.$$

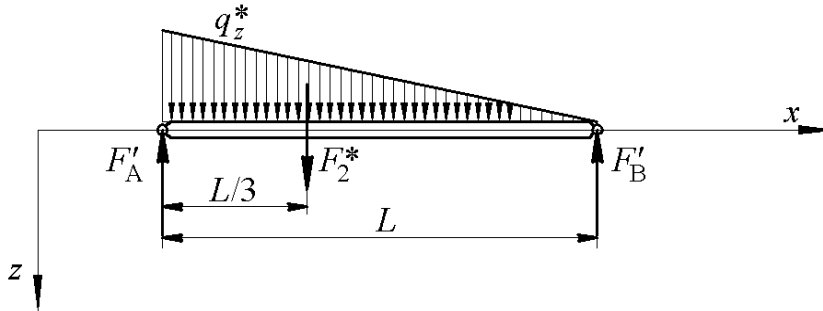
$$\sum M_A^d = 0 \Rightarrow F_2^* \frac{L}{3} = F_B' L \Rightarrow F_B' = F_2^* \frac{1}{3} = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{6}, F_A' = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{3}.$$
(1.42)



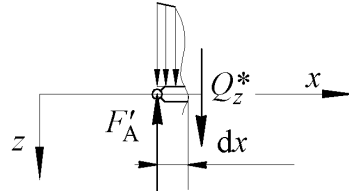
Slika 1.14. Opisivanje grede analognom gredom



Slika 1.15. Reakcije u osloncima analogne grede



Slika 1.16. Ravnoteža središnjeg dijela analogne grede

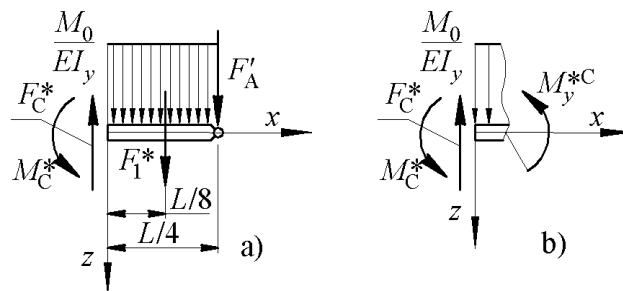


Slika 1.17. Poprečna sila u zglobu A analognog nosača

Prema Slici 1.17. možemo odrediti unutrašnju poprečnu silu u presjeku A:

$$\sum F_z^* = 0 \Rightarrow F_A' = Q_z^* \Rightarrow \alpha_G = -Q_z^* = -\frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{3}. \quad (1.43)$$

Time smo izračunali kut nagiba tangente na elastičnu liniju u točki A. Kut je negativan što znači da se tangenta zakrenula u smjeru kazaljke na satu, što je i očekivano. Nadalje ćemo razmatrati ravnotežu lijevog dijela nosača, lijevo od točke A, prema Slici 1.18. a).



Slika 1.18. Ravnoteža dijela analognog nosača lijevo od točke A: a) vanjske reakcije na dio nosača, b) unutrašnji moment savijanja

Reaktivni moment u točki C analogne grede je:

$$\sum M_C^* = 0 \Rightarrow F_A' \frac{L}{4} + F_1^* \frac{L}{8} = M_C^* = \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{3} \frac{L}{4} + \frac{M_0}{EI_y} \frac{L}{4} \frac{L}{8} = \frac{M_0 L^2}{EI_y} \frac{19}{192}. \quad (1.44)$$

Prema Slici 1.18. b) na osnovi uvjeta ravnoteže zamišljeno odsječenog dijela nosača izračunavamo unutrašnji moment savijanja u presjeku C:

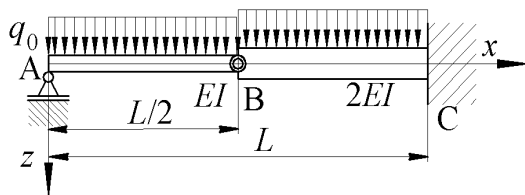
$$\sum M_C^* = 0 \Rightarrow M_C^* + M_y^{*C} = 0 \Rightarrow M_y^{*C} = -M_C^* = -\frac{M_0 L^2}{EI_y} \frac{19}{192}. \quad (1.45)$$

Prema analogiji, progib u točki C, w_C i nagib tangente u točki A, α_A su:

$$w_C = M_y^{*C} = -\frac{19}{192} \frac{M_0 L^2}{EI_y}; \alpha_A = -Q_A^* = -\frac{1}{3} \frac{M_0 L}{EI_y}. \quad (1.46)$$

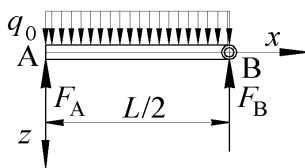
Primjer 1.4. Metoda analogne grede.

Za nosač zadan i opterećen prema Slici 1.19. potrebno je odrediti progib na mjestu Gerberovog zgloba, točka B, i odrediti nagib u lijevom zglobnom osloncu, točka A. Zadano: EI_y , q_0 , L .



Slika 1.19. Greda opterećena raspodijeljenim opterećenjem

Kao prvi korak u rješavanju ovog primjera odredit ćemo reakcije veza. Na Slici 1.20. ucrtane su pretpostavljene reakcije u rubovima lijevog dijela nosača. Budući da na ovaj nosač djeluju 3 reakcije veza, sila u točki A, sila i moment u točki B, osim dvije nezavisne jednačbe ravnoteže trebamo dodatnu jednačbu za određivanje reakcija. Ta dodatna jednačba dolazi iz uvjeta da je moment savijanja jednak nuli u Gerberovom zglobu, točka B. Reakcije ćemo odrediti promatrajući ravnotežu lijevog dijela nosača, odrediti reakcije, odnosno silu u Gerberovom zglobu, pa pomoću te sile odrediti reakcije na desnom dijelu nosača.



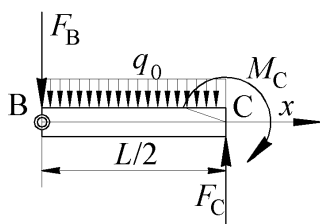
Slika 1.20. Ravnoteža lijevog dijela grede

Za zamišljeno oslobođen lijevi dio nosača jednačbe ravnoteže i reakcije su:

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow F_A + F_B = q_0 \frac{L}{2}. \\ \sum M_A = 0 &\Rightarrow F_B \frac{L}{2} + q_0 \frac{L}{2} \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow F_B = q_0 \frac{L}{4} \Rightarrow F_A = q_0 \frac{L}{4}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

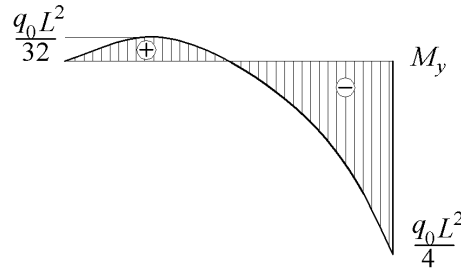
Za desni dio nosača koristimo suprotno usmjerenu silu F_B prema principu akcije i reakcije, pa izračunavamo reakcije u desnom osloncu, kako su prikazane na Slici 1.21.

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0 &\Rightarrow F_C = q_0 \frac{L}{2} + F_B \Rightarrow F_C = q_0 \frac{3L}{4}. \\ \sum M_C = 0 &\Rightarrow M_C = F_B \frac{L}{2} + q_0 \frac{L}{2} \frac{L}{4} \Rightarrow M_C = q_0 \frac{L^2}{4}. \end{aligned} \quad (1.48)$$



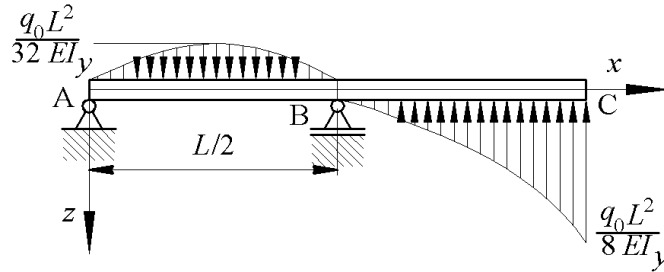
Slika 1.21. Ravnoteža desnog dijela grede

Na osnovi reakcija veza, nacrtat ćemo dijagram momenta savijanja, prikazan na Slici 1.22.



Slika 1.22. Momentni dijagram grede

Idući korak je definiranje fiktivnog nosača, prikazanog na Slici 1.23. Pri tome zamjenjujemo oslonce prema opisanim analogijama prikazanih na Slici 1.10. i prema (1.39), što znači da će zglobovi oslonac A u kojem je pomak jednak nuli a nagib tangente različit od nule imati na analognom nosaču moment savijanja jednak nuli, a poprečnu silu različitu od nule, što je opet zglobovi oslonac, nadalje u točki B, u Gerberovom zglobovi, je pomak različit od nule, ali su nagibi tangente s desne i s lijeve strane različiti, što zamjenjujemo prijelaznim zglobovima osloncem, te u uklještenju, točka C, progib i nagib su nula, što zamjenjujemo slobodnim krajem. Analogni nosač je opterećen prema (1.39) raspodijeljenim opterećenjem $q_z^* = M_y / (EI_y)$.



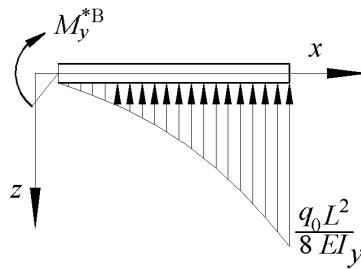
Slika 1.23. Raspodijeljeno opterećenje analogne grede

Za određivanje progiba je potreban moment savijanja u analognoj gredi na zadanom mjestu, a za kut nagiba tangente na elastičnu liniju unutrašnja poprečna sila. Budući da je raspodjela raspodijeljenog opterećenja za nosač na Slici 1.23. paraboloidna, moment fiktivne grede u presjeku B, prikazan na Slici 1.24., ćemo izračunati integriranjem jednadžbe raspodijeljenog opterećenja, a za to nam treba jednadžba tog opterećenja. Jednadžbu raspodijeljenog opterećenja analogne grede ćemo dobiti iz jednadžbe momenta savijanja stvarne grede, podijeljenu sa svojom krutosti. Jednadžba raspodijeljenog opterećenja analogne grede je:

$$q_z^* = -\frac{q_0}{2EI_y} (0,25Ls + 0,5s^2) \quad |s = x - L/2, \in [0, L/2]|. \quad (1.49)$$

Radi jednostavnijeg integriranja uvedena je nova koordinata s koja ima ishodište u točki B. Nakon izračunavanja momenta raspodijeljenog opterećenja u presjeku B, analogijom dobiva se progib u točki B prema:

$$\begin{aligned} M_y^{*B} &= \int_0^{L/2} \frac{q_0}{2EI_y} (0,25Ls + 0,5s^2) s \, ds = \frac{q_0}{EI_y} \left(0,25Ls^3 / 3 + 0,5s^4 / 4 \right) \Big|_0^{L/2} = \\ &= \frac{q_0}{2EI_y} \left(\frac{L^4}{96} + \frac{L^4}{128} \right) = \frac{q_0 L^4}{EI_y} 9,115 \cdot 10^{-3} \Rightarrow w_B = M_y^{*B} = \frac{q_0 L^4}{EI_y} 9,115 \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (1.50)$$



Slika 1.24. Fiktivni moment u presjeku B

Za reakciju u osloncu A analogne grede potrebno je izračunati moment raspodijeljenog opterećenja analogne grede oko točke B koji iznosi:

$$M_B^*(q_z^*) = \frac{q_0 L^4}{EI_y} 9,115 \cdot 10^{-3} + \int_0^{L/2} \frac{q_0}{EI_y} (0,25Lx - 0,5x^2) \left(\frac{L}{2} - x \right) dx =$$

$$\frac{q_0}{EI_y} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{L^2}{2} \frac{x^2}{2} - L \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{4} \right) \right) \Bigg|_0^{L/2} = \frac{q_0 L^4}{EI_y} 9,115 \cdot 10^{-3} + \frac{q_0}{EI_y} \left(\frac{1}{4} \left(\frac{L^4}{16} - \frac{L^4}{24} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{L^4}{48} - \frac{L^4}{64} \right) \right) = (1.51)$$

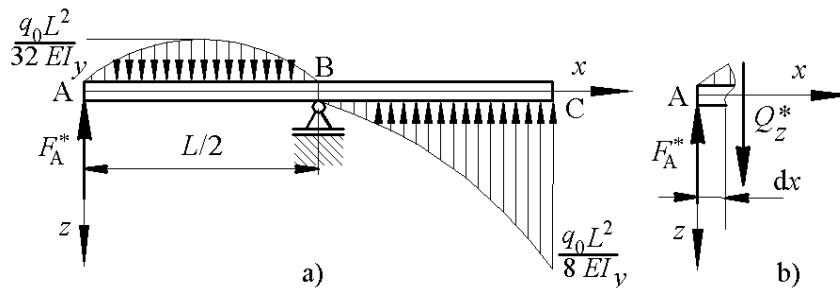
$$\frac{q_0 L^4}{EI_y} 9,115 \cdot 10^{-3} + \frac{q_0 L^4}{384 EI_y} = 1,172 \cdot 10^{-2} \frac{q_0 L^4}{EI_y}.$$

Nakon izračunavanja momenta koji stvara raspodijeljeno opterećenje analogne grede oko točke B u (1.50) i (1.51), možemo izračunati reakciju u točki A analognog nosača, prikazanu na Slici 1.25.:

$$\sum M_B^* = 0 \Rightarrow M_B^*(q_z^*) = F_A^* \frac{L}{2} \Rightarrow F_A^* = \frac{2}{L} 1,172 \cdot 10^{-2} \frac{q_0 L^4}{EI_y} = 2,344 \cdot 10^{-2} \frac{q_0 L^3}{EI_y}. \quad (1.52)$$

Iz poznate reakcije u osloncu A analogne grede možemo izračunati unutrašnju poprečnu silu i analogijom kut nagiba tangente na elastičnu liniju u toj točki:

$$Q_{Az}^* = F_{Az}^* = \frac{q_0 L^3}{EI_y} 2,344 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \alpha_A = -Q_{Az}^* = -\frac{q_0 L^3}{EI_y} 2,344 \cdot 10^{-2} \quad (1.53)$$

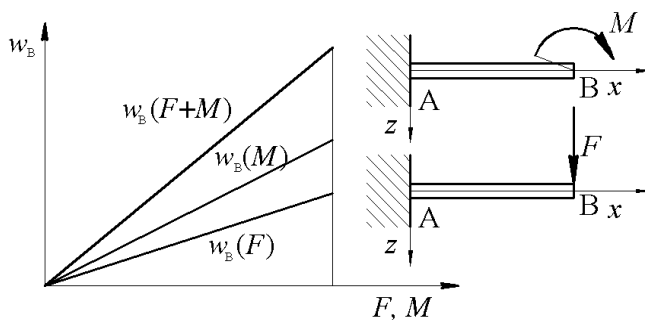


Slika 1.25. Poprečna sila: a) reakcija u lijevom osloncu analogne grede, b) unutrašnja poprečna sila

2. RJEŠAVANJE STATIČKI NEODREĐENIH NOSAČA

Nosače koji imaju više nepoznatih reakcija u osloncima (sile i momenti u osloncima) od broja linearno nezavisnih jednačbi ravnoteže koji se mogu postaviti, zovemo statički neodređenim nosačima [1, 4, 16, 23]. Prekobrojnost reakcija u odnosu na broj jednačbi ravnoteže određuje mnogostrukost statičke neodređenosti; ako je prekobrojna jedna reakcija veza, nosač je jednostruko ili jedanput statički neodređen, itd. Statički određen nosač je nosač kojem se oblik može promijeniti samo deformiranjem njegovih dijelova [23]. Jedan primjer statički neodređenog nosača je prikazan na Slici 2.1. Kao početak rješavanja postavljamo uvjete statičke ravnoteže. Jedan način rješavanja statički neodređenih zadatka je postavljanje dopunskih jednačbi postavljanjem uvjeta deformiranja, što će biti opisano u poglavlju 2.1. Drugi način rješavanja je integriranje diferencijalne jednačbe elastične linije uz uvođenje rubnih uvjeta, pri čemu ne pišemo jednačbe statičke ravnoteže.

U slučaju postavljanja uvjeta deformiranja, postavljamo onoliko uvjeta deformiranja koliko je prekobrojnih reakcija veza. Pri postavljanju uvjeta deformiranja koristimo se principom superpozicije. Princip superpozicije u mehanici deformabilnih tijela možemo primijeniti samo ako je problem linearan. Pojam linearnosti problema deformiranja ćemo opisati na primjeru konzole na Slici 2.1. Neka je konzola opterećena istovremeno silom i momentom. Ako je djelovanje sile i momenta zbrojeno takvo da ne uzrokuje pojavu plastične deformacije, onda nije bitno izračunamo li da prvo djeluje sila pa dodamo djelovanje momenta na konzolu ili obrnuto. je pomak kraja konzole uslijed momenta kraju linearan, i ako je progib na kraju konzole uslijed sile na njenom kraju linearan, a linearan pomak o momentu i sili će za konzolu biti ako nema oslonaca koji bi pružili otpor deformiranju, tj. pomicanju konzole nakon nekog iznosa pomaka, onda pomak uslijed istovremenog djelovanja sile i momenta možemo zbrojiti i to će biti ukupni pomak konzole, što možemo učiniti i s momentom savijanja ili kojom drugom veličinom. Pojednostavljeno, princip superpozicije možemo opisati kao način izračunavanja npr. naprezanja, momenta savijanja ili koje druge fizikalne veličine nosača, izračunavanjem te odabrane veličine za „pojednostavljen“ nosač i zbrajanjem odabrane veličine za sve pojednostavljene nosače kojima opisujemo zadani nosač.

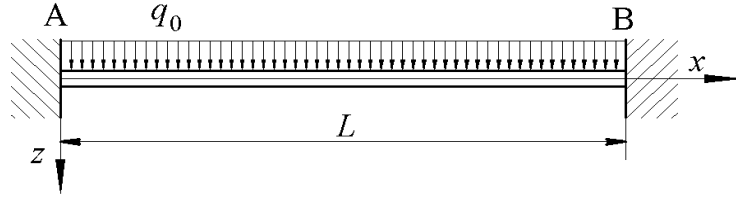


Slika 2.1. Linearnost progiba o sili i momentu

Pri tome zadani nosač zamjenjujemo, ili opisujemo, pomoću više statički određenih nosača. Jedan od tih nosača je opterećen aktivnim opterećenjem (zadanim silama, spregovima i raspodijeljenim opterećenjem) i za njega izračunavamo progib i/ili nagib, ovisno o mnogostrukosti statičke neodređenosti, u točki prekobrojnosti veze. Svi ostali nosači su opterećeni obično po jednom prekobrojnomo reakcijom veza koju promatramo kao novo aktivno opterećenje za taj nosač i izračunavamo progib i/ili nagib u točki prekobrojnosti veze. Primjer tog postupka je prikazan na Slici 2.3. Prema principu superpozicije opisujemo deformiranje zadanog nosača kao zbroj deformiranja pojedinih statički određenih nosača kojima smo opisali zadani nosač. U primjeru 2.1. prikazano je rješenje nosača primjenom metode integriranja diferencijalne jednačbe elastične linije. U primjeru 2.2. isti taj nosač je riješen principom opisivanja statičkim nosačem.

Primjer 2.1. Statički neodređeni nosači. Metoda integriranja diferencijalne jednačbe.

Za nosač zadan i opterećen prema Slici 2.1. potrebno je odrediti najveći progib i dijagram momenta savijanja. Zadano: $EI_y = \text{konst.}$, q_0 , L .



Slika 2.2. Greda dva puta statički neodređena

Raspodijeljeno opterećenje na nosaču na Slici 2.2. je konstantno, $q_z = q_0$. Rubne uvjete možemo očitati sa Slike 2.2. progib i kut nagiba tangente, u uklještenjima:

$$\begin{aligned} w(x=0) &= 0, \alpha(x=0) = 0, \\ w(x=L) &= 0, \alpha(x=L) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Prvo zapisujemo diferencijalnu jednadžbu elastične linije sa zadanim raspodijeljenim opterećenjem. Zatim provodimo korake transformacije jednadžbe u kontekstu diferencijalnog i integralnog računa [1, 13, 16, 18] te provodimo integraciju:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) &= q_0 \quad /dx \Rightarrow d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = q_0 dx / \int dx. \\ \int d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) &= \int q_0 dx \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x + C_1. \\ \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= q_0 x + C_1 \quad /dx \Rightarrow d \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = (q_0 x + C_1) dx / \int dx. \\ \int d \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= \int (q_0 x + C_1) dx \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

U jednadžbama (2.2) su nakon pojedinih koraka integracije veličine $Q_z = -EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}$ funkcija poprečne sile i $M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$ funkcija momenta savijanja za koje u ovom primjeru ne znamo rubne uvjete. Znamo samo rubne uvjete progiba i nagiba tangete, koje ćemo uvrstiti u iduće jednadžbe.

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \\ \left| \frac{dw}{dx}(0) = 0 \right| &\Rightarrow C_3 = 0, \left| \frac{dw}{dx}(L) = 0 \right| \Rightarrow q_0 \frac{L^3}{6} + C_1 \frac{L^2}{2} + C_2 L = 0. \quad (a) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$EI_y w = q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_4.$$

$$\left| w(0) = 0 \right| \Rightarrow C_4 = 0, \left| w(L) = 0 \right| \rightarrow q_0 \frac{L^4}{24} + C_1 \frac{L^3}{6} + C_2 \frac{L^2}{2} = 0. \quad (b)$$

$$\begin{aligned} (a) &\Rightarrow -q_0 \frac{L^2}{6} = C_1 \frac{L}{2} + C_2; C_2 = -q_0 \frac{L^2}{6} - C_1 \frac{L}{2} \rightarrow (b) \\ -q_0 \frac{L^2}{24} &= C_1 \frac{L}{6} + \left(-q_0 \frac{L^2}{6} - C_1 \frac{L}{2} \right) \frac{1}{2} \Rightarrow -q_0 \frac{L}{2} = C_1 \Rightarrow C_2 = q_0 \frac{L^2}{12}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$w = \frac{1}{EI_y} \left(q_0 \frac{x^4}{24} - q_0 \frac{L}{2} \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{L^2}{12} \frac{x^2}{2} \right).$$

Kada je izračunata funkcija progiba, možemo izračunati najveći progib i funkciju momenta savijanja. Za najveći progib izračunavamo prvo mjesto najvećeg progiba postavljanjem uvjeta ekstrema funkcije progiba, tj. mjesta gdje je nagib tangente na funkciju progiba jednak nuli:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} &= q_0 \frac{x_0^3}{6} - q_0 \frac{L}{2} \frac{x_0^2}{2} + q_0 \frac{L^2}{12} x_0 = 0 \Rightarrow x_0 \left(q_0 \frac{L^2}{12} - q_0 \frac{L}{4} x_0 + q_0 \frac{x_0^2}{6} \right) = 0. \\ (x_0)_1 &= 0; q_0 \frac{x_0^2}{6} - q_0 \frac{L}{4} x_0 + q_0 \frac{L^2}{12} = 0. \\ (x_0)_{2,3} &= \frac{q_0 \frac{L}{4} \pm \sqrt{q_0^2 \frac{L^2}{16} - q_0^2 \frac{L^2}{18}}}{\frac{q_0}{3}} = \frac{3}{q_0} \left(q_0 \frac{L}{4} \pm q_0 \frac{L}{12} \right) \Rightarrow (x_0)_2 = L; (x_0)_3 = \frac{L}{2}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

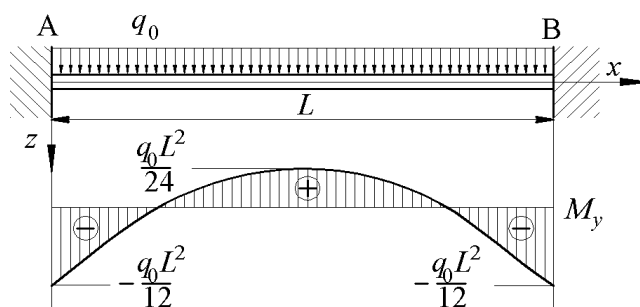
Od tri točke u kojima funkcija progiba ima ekstrem, u jednoj će progib imati maksimum, a to je $(x_0)_3 = L/2$.

$$w_{\max} = w \left(x \left(\frac{dw}{dx} = 0 \right) \right) \Rightarrow w_{\max} = \frac{1}{EI_y} \left(q_0 \frac{L^4}{16 \cdot 24} - q_0 \frac{L}{2} \frac{L^3}{48} + q_0 \frac{L^2}{12} \frac{L^2}{8} \right) = \frac{q_0 L^4}{384 EI_y}. \quad (2.6)$$

Moment savijanja izračunavamo prema:

$$M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{L}{2} x - q_0 \frac{L^2}{12}. \quad (2.7)$$

Dijagram momenta savijanja prema jednadžbi (2.7) je prikazan na Slici 2.3.



Slika 2.3. Dijagram momenta savijanja

2.1. Princip opisivanja statičkim nosačem

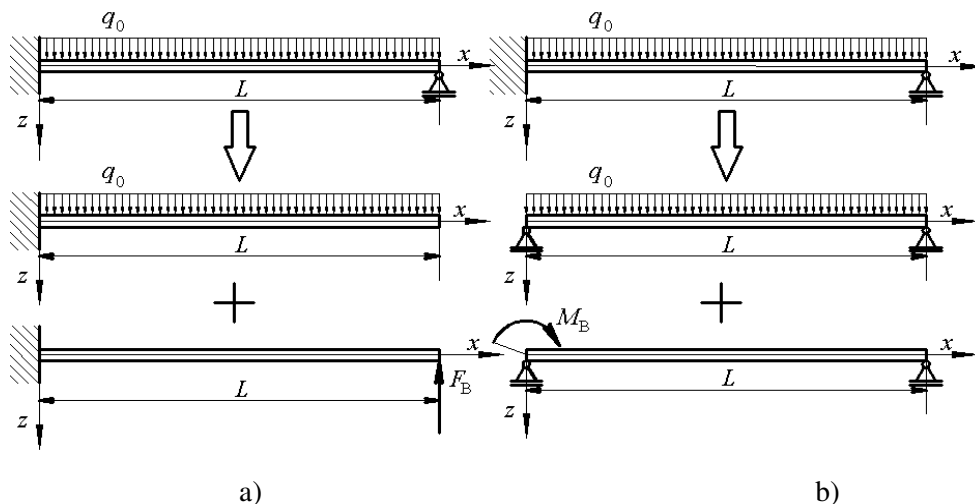
Statički neodređene nosače možemo riješiti, odnosno odrediti im reakcije u osloncima, principom superpozicije [1, 4, 16, 23]. Nužan uvjet za primjenu tog principa je da je problem, odnosno deformiranje nosača, linearno. Princip superpozicije ne primjenjujemo u slučajevima kada nastaju plastične (trajne) deformacije u nosaču, kada postoji geometrijska ili materijalna nelinearnost, i sl. Ako vrijedi princip superpozicije, znači da je nebitno kako ćemo gledati ili izračunavati ukupno naprezanje, progibe i ostale veličine za nosač, kad nosač opišemo pomoću više nosača.

Statički neodređeni nosač zamjenjujemo odgovarajućim statički određenim problemom, gdje se nepoznate prekobrojne reakcije uzimaju kao aktivno opterećenje. Takav statički određen problem moguće je riješiti metodom superpozicije u svrhu jednostavnijeg proračunavanja. Dodatne jednadžbe dobivaju se postavljanjem odgovarajućih rubnih uvjeta, odnosno uvjeta deformacije. Ukupni progib, nagib tangente, sila na nekom mjestu ili moment jednaki su zbroju odgovarajućih veličina na odabranom mjestu svih statički određenih nosača koji služe za opisivanje zadanog statički neodređenog nosača. Ovisno o načinu na koji smo odlučili opisati statički neodređeni nosač, ovisi koje ćemo nepoznate reakcije postaviti kao opterećenje na statički određene nosače čije deformiranje, tj. odziv zbrajamo. Primjerice, gredu s uklještenjem i zglobnim osloncem, koja je jednostruko statički neodređena, možemo prikazati kao zbroj konzole s reakcijom u zglobnom osloncu kao opterećenjem, prikazano na Slici 2.4. a), ili gredu na dva zglobna oslonca sa spregom

koji je reakcija u uklještenju, kao opterećenjem, prikazano na Slici 2.4. b). U primjeru 2.2. će biti prikazana primjena tog principa. Zamjena nosača statički određenim nosačima se može provesti na više načina, što bismo za nosač na Slici 2.4. mogli učiniti na dva načina; prvi način je da gredu s dva uklještenja na Slici 2.2. opišemo kao gredu na dva zglobna oslonca i dodamo na svaki zglobni oslonac jedan spreg kao reakciju u uklještenju.

Primjer 2.2. Greda s dva uklještenja.

Za gredu iz Primjera 2.1. odrediti dijagram momenta savijanja principom opisivanja statičkim nosačem.

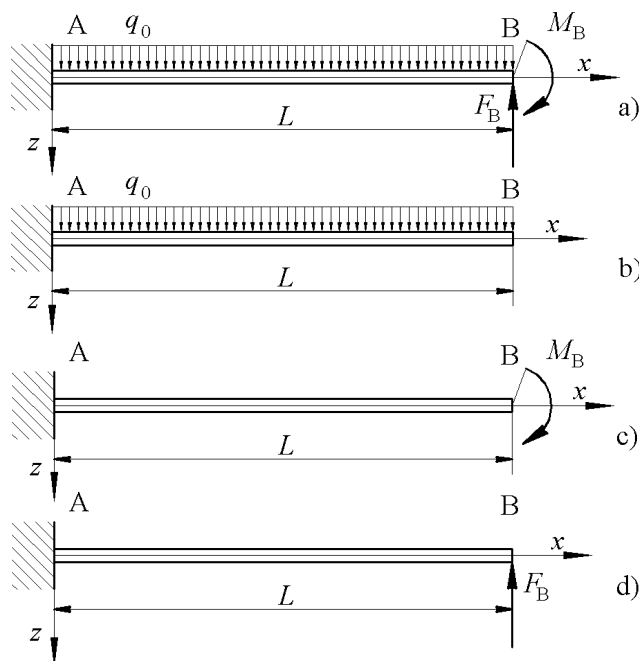


Slika 2.4. Dva načina opisivanja nosača statički određenim nosačima; a) opisivanje konzolama, b) opisivanje gredama na dva oslonca

Ovaj nosač je dva puta statički neodređen jer ukupno postoji četiri reakcije veze, sila i moment u lijevom i u desnom uklještenju, a na raspolaganju su nam dvije jednačbe ravnoteže, ravnoteža poprečnih sila i momenata oko osi y . Uvjete deformiranja ćemo opisati pomoću sile i momenta u desnom uklještenju kao prekobrojnih reakcija. Uvjeti deformiranja u takvom promatranju su:

$$w_B(x=L) = 0, \alpha_B(x=L) = 0. \quad (2.8)$$

Na Slici 2.5. prikazan je zamišljeni, statički određeni, nosač s dodanim reakcijama veze točke B kao aktivnih opterećenja, koji opisuje deformiranje nosača na Slici 2.2.



Slika 2.5. Opisivanje pomoću statički određenog nosača: a) uklanjanje prekobrojne veze, b) aktivno opterećenje, c) prekobrojni spreg, d) prekobrojna sila

Deformiranje uslijed aktivnog opterećenja q_0 i reakcija F_B, M_B mora zadovoljiti uvjet deformiranja. (2.8) Prema Tablici 9.3. (Pomaci i kutovi zakreta tangente) u [1] progib i nagib konzole na slobodnom kraju opterećene jednolikim raspodijeljenim opterećenjem q_0 jednaki su:

$$w_B^{q_0} = \frac{q_0 L^4}{8EI_y}, \alpha_B^{q_0} = -\frac{q_0 L^3}{6EI_y}. \quad (2.9)$$

Uzimajući u obzir pretpostavljene reakcije (smjer), slično za opterećenje spregom i silom iz tablice očitavamo:

$$w_B^M = \frac{M_B L^2}{2EI_y}, \alpha_B^M = -\frac{M_B L}{EI_y}; w_B^F = -\frac{F_B L^3}{3EI_y}, \alpha_B^F = \frac{F_B L^2}{2EI_y}. \quad (2.10)$$

Zbrojeno progib i nagib od sva tri opterećenja moraju biti jednaki nuli. Postavljanjem uvjeta deformiranja (2.8) dobivamo dvije jednačbe s dvije nepoznanice, M_B i F_B :

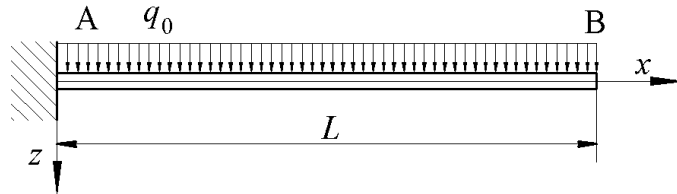
$$\begin{aligned} w_B(x=L) = 0 &\Rightarrow \frac{q_0 L^4}{8EI_y} + \frac{M_B L^2}{2EI_y} - \frac{F_B L^3}{3EI_y} = 0. \quad (a) \\ \alpha_B(x=L) = 0 &\Rightarrow -\frac{q_0 L^3}{6EI_y} - \frac{M_B L}{EI_y} + \frac{F_B L^2}{2EI_y} = 0. \quad (b) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Rješenje tih jednačbi je:

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{3q_0 L^2}{8} + \frac{3M_B}{2} &= F_B L; \quad (b) \quad -\frac{q_0 L^2}{6} - M_B + \frac{F_B L}{2} = 0. \\ (a) \rightarrow (b) &\Rightarrow -\frac{q_0 L^2}{6} - M_B + \frac{\frac{3q_0 L^2}{8} + \frac{3M_B}{2}}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{q_0 L^2}{6} + \frac{3q_0 L^2}{16} = M_B - \frac{3M_B}{4}. \\ M_B &= \frac{q_0 L^2}{12}; \quad F_B = \frac{q_0 L}{2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Čitatelj se može uvjeriti da su ista rješenja za moment i silu u uklještenju prikazana i u [16]. Dijagram momenta savijanja nosača je prikazan na Slici 2.10., i to kao zbroj momenata savijanja od pojedinih opterećenja.

Radi vježbe će nadalje biti prikazano izračunavanje jednačbi elastične linije za pojedina opterećenja metodom integriranja diferencijalne jednačbe elastične linije, te izračunat najveći progib na nosaču. Izračun će biti prikazan skraćeno, bez detalja o postupku, a detaljno rješavanje ovakvog primjera je prikazano u Primjeru 1.1.



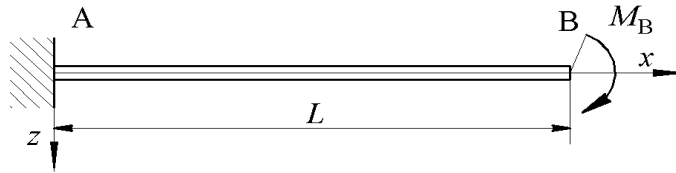
Slika 2.6. Konzola opterećena aktivnim opterećenjem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) &= q_0 / dx \Rightarrow d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = q_0 dx / \int dx. \\ \int d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) dx &= \int q_0 dx \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x + C_1 \quad |Q_z(x=L) = 0|. \\ 0 &= q_0 L + C_1 \Rightarrow C_1 = -q_0 L \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_0 x - q_0 L. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 d\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) &= (q_0 x - q_0 L) dx / \int dx. \\
 EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} &= q_0 \left(\frac{x^2}{2} - xL\right) + C_2 \quad |M_y(x=L) = 0|. \\
 0 &= q_0 \left(\frac{L^2}{2} - L^2\right) + C_2 \Rightarrow C_2 = q_0 \frac{L^2}{2} \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = q_0 \left(\frac{x^2}{2} - xL\right) + q_0 \frac{L^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
 d\left(EI_y \frac{dw}{dx}\right) &= \left[q_0 \left(\frac{x^2}{2} - xL\right) + q_0 \frac{L^2}{2}\right] dx / \int dx. \\
 EI_y \frac{dw}{dx} &= q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2}\right) + q_0 \frac{L^2}{2} x + C_3 \quad |\alpha(x=0) = 0|. \\
 C_3 &= 0 \Rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2}\right) + q_0 \frac{L^2}{2} x.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 d(EI_y w) &= \left[q_0 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{2}\right) + q_0 \frac{L^2}{2} x\right] dx / \int dx. \\
 EI_y w &= q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 L}{6}\right) + q_0 \frac{L^2}{2} \frac{x^2}{2} + C_4 \quad |w(x=0) = 0|. \\
 C_4 &= 0 \Rightarrow EI_y w = q_0 \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^3 L}{6}\right) + q_0 \frac{L^2}{2} \frac{x^2}{2} \Rightarrow w^{q_0} = \frac{q_0 L^4}{EI_y} \left(\frac{1}{24} \left(\frac{x}{L}\right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{L}\right)^2\right).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$



Slika 2.7. Konzola opterećena prekobrojnim spregom

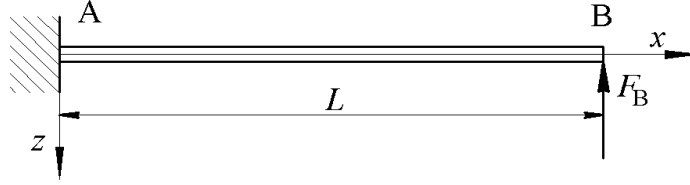
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}\right) &= 0/dx \Rightarrow d\left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}\right) = 0 dx / \int dx. \\
 \int d\left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}\right) dx &= \int 0 dx \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 + C_1 \quad |Q_z(x=L) = 0| \Rightarrow C_1 = 0. \\
 EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
 d\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}\right) &= 0 dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 + C_2 \quad |M_y(x=L) = -M_B|. \\
 M_B &= 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = M_B \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = M_B.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 d\left(EI_y \frac{dw}{dx}\right) &= M_B dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = M_B x + C_3 \quad |\alpha(x=0) = 0|. \\
 C_3 &= 0 \Rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = M_B x.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$d(EI_y w) = M_B x dx / \int dx \Rightarrow EI_y w = M_B \frac{x^2}{2} + C_4 \quad |w(x=0) = 0|.$$

$$C_4 = 0 \Rightarrow EI_y w = M_B \frac{x^2}{2} \Rightarrow w^{M_B} = \frac{M_B L^2}{EI_y} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2.$$
(2.20)



Slika 2.8. Konzola opterećena prekobrojn timer silom

$$\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = 0 / dx \Rightarrow d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = 0 dx / \int dx.$$

$$\int d \left(EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} \right) dx = \int 0 dx \Rightarrow EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 + C_1 \quad |Q_z(x=L) = -F_B| \Rightarrow C_1 = F_B.$$

$$EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = F_B.$$
(2.21)

$$d \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = F_B dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = F_B x + C_2 \quad |M_y(x=L) = 0|.$$

$$0 = F_B L + C_2 \Rightarrow C_2 = -F_B L \Rightarrow EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = F_B x - F_B L.$$
(2.22)

$$d \left(EI_y \frac{dw}{dx} \right) = (F_B x - F_B L) dx / \int dx \Rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = \left(F_B \frac{x^2}{2} - F_B x L \right) + C_3 \quad |\alpha(x=0) = 0|.$$

$$C_3 = 0 \Rightarrow EI_y \frac{dw}{dx} = F_B \frac{x^2}{2} - F_B x L.$$
(2.23)

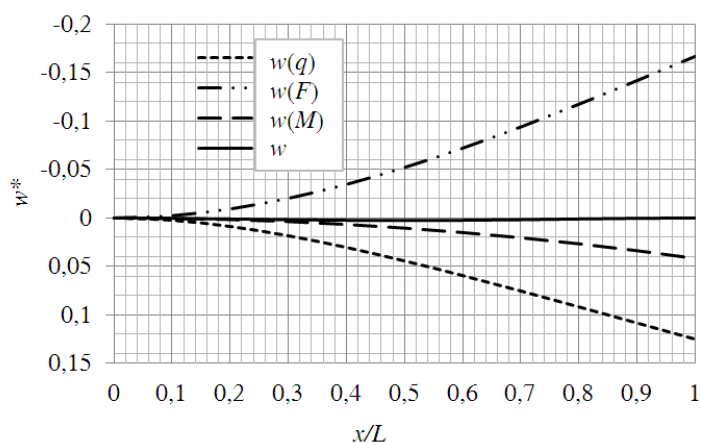
$$d(EI_y w) = \left(F_B \frac{x^2}{2} - F_B x L \right) dx / \int dx \Rightarrow EI_y w = \left(F_B \frac{x^3}{6} - F_B \frac{x^2}{2} L \right) + C_4 \quad |w(x=0) = 0|.$$

$$C_4 = 0 \Rightarrow EI_y w = F_B \frac{x^3}{6} - F_B \frac{x^2}{2} L \Rightarrow w^{F_B} = \frac{F_B L^3}{EI_y} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right].$$
(2.24)

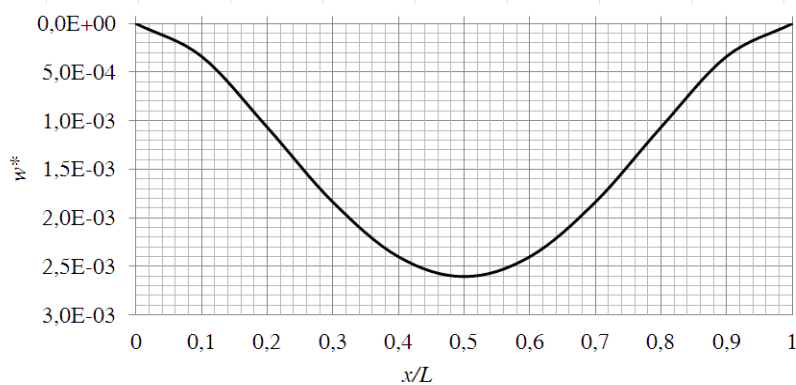
Općenito bi za izračunavanje maksimuma progiba trebalo postaviti uvjeta ekstrema funkcije, iz kojeg bi se izračunala koordinata maksimuma, pa onda i vrijednost funkcije progiba. Ovaj zadatak, odnosno nosač, je simetričan jer su zadovoljeni uvjeti simetrije; geometrijski je simetričan prema središnjoj ravnini paralelnoj ravnini Oyz , opterećenje je simetrično prema toj ravnini i materijal je homogen i izotropan. Iskoristit ćemo simetriju za određivanje najvećeg progiba time što ćemo unaprijed reći da je najveći progib na sredini nosača. Kada ne bismo imali simetričan nosač, onda je uvjet za traženje najvećeg progiba traženje mjesta (x_0) za koje je nagib tangente jednak nuli, $\alpha(x_0) = 0$, pa izračunavanje progiba za to mjesto, $w_{\max} = w(x_0)$. Za određivanje najvećeg progiba zbrojit ćemo progibe uslijed tri razmatrana opterećenja prema jednadžbama (2.16), (2.20) i (2.24) za koordinatu $x = L/2$, uz uvrštavanje (2.12) što daje:

$$\begin{aligned}
 w_{\max} &= w^{q_0} \left(x = \frac{L}{2} \right) + w^{M_B} \left(x = \frac{L}{2} \right) + w^{F_B} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \\
 &= \frac{q_0 L^4}{EI_y} \left[\frac{1}{24} \left(\frac{1}{2} \right)^4 - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{M_B L^2}{EI_y} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{F_B L^3}{EI_y} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (2.25) \\
 w_{\max} &= \frac{q_0 L^4}{EI_y} \frac{1}{384}.
 \end{aligned}$$

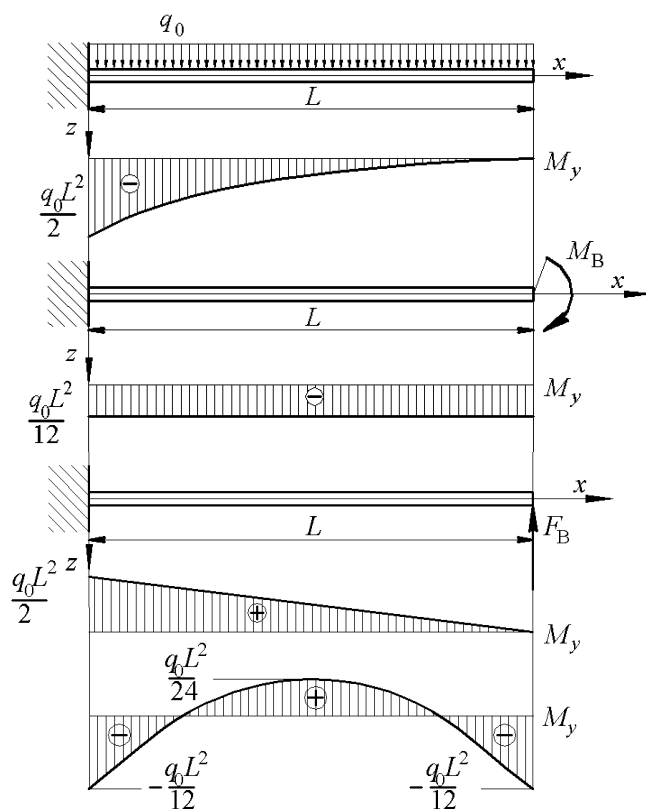
Isto rješenje je prikazano u [16]. Na Slici 2.8. su prikazani oblici elastičnih linija pojedinih reakcija i opterećenja, a na Slici 2.9. elastična linija za nosač. Progib je normiran (podijeljen) veličinom $q_0 L^4 / (EI_y)$ radi lakšeg prikaza. Dijagram momenta savijanja ćemo izračunati poznavajući reakcije u osloncu B kao zbroj momenata savijanja po nosaču od pojedinih opterećenja, kako je prikazano na Slici 2.10.



Slika 2.9. Elastična linija pojedinih reakcija i opterećenja



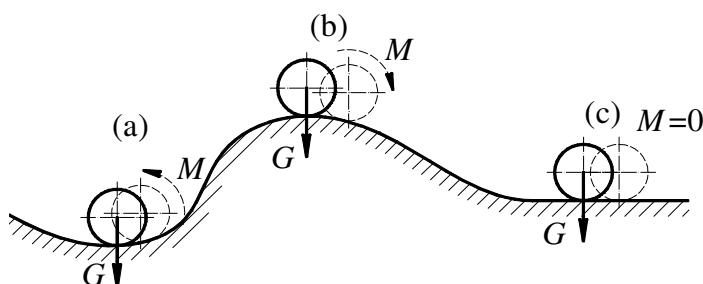
Slika 2.10. Elastična linija nosača



Slika 2.11. Dijagrami momenta savijanja pojedinih opterećenja i cijelog nosača

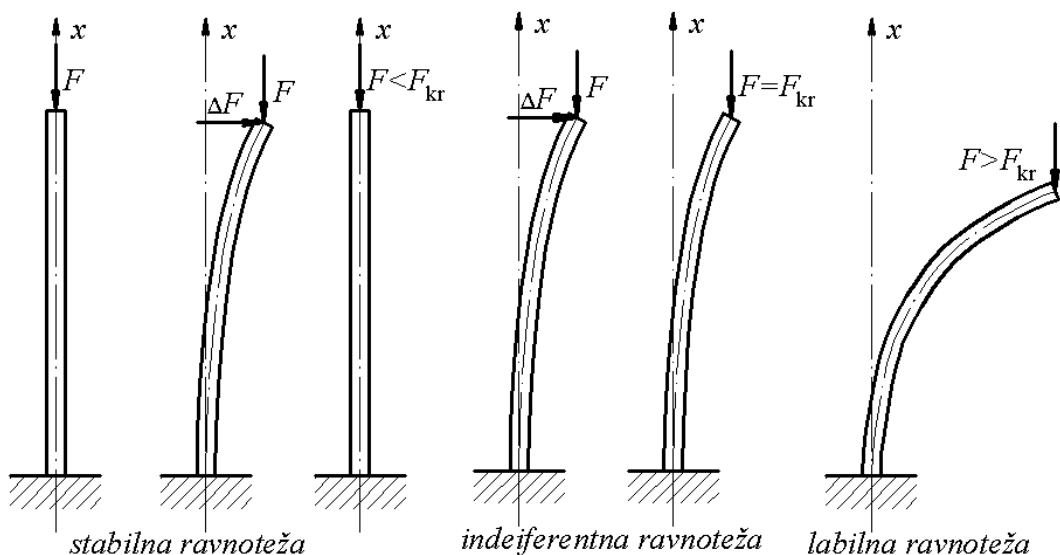
3. IZVIJANJE RAVNIH ŠTAPOVA – GUBITAK ELASTIČNE STABILNOSTI

Pojam elastične stabilnost ćemo uvesti kroz primjere s krutim tijelom. Na Slici 3.1. je prikazano kruto tijelo, valjak, koje se nalazi u stanju stabilne (a), labilne (b) i indiferentne ravnoteže (c). U slučaju stabilne ravnoteže (a) na Slici 3.1., otklanjanjem, tj. izvođenjem tijela iz položaja ravnoteže, reakcija veza i aktivna sila čine moment koji uvjetuje vraćanje tijela u ravnotežni položaj iz kojeg je izmaknuto. U slučaju labilne ravnoteže (b) na Slici 3.1., izmicanjem tijela iz ravnotežnog položaja aktivna sila i reakcija veza stvaraju moment koji uvjetuje daljnje udaljavanje tijela od ravnotežnog položaja. U slučaju indiferentne ravnoteže (c) na Slici 3.1., izmicanjem tijela iz ravnotežnog položaja ne nastaje moment koji bi ili vraćao u ravnotežni položaj ili odmicao od njega, tijelo ostaje u stanju (položaju) nakon prestanka djelovanja poremećajne sile, kojom je izmaknuto iz ravnotežnog položaja.



Slika 3.1. Valjak u tri stanja ravnoteže [1]

Kada razmatramo tanke štapove u kontekstu stabilnosti, prema Slici 3.2., postoje opet tri moguća slučaja ravnoteže, stabilna, indiferentna i labilna ravnoteža. Ako na neki štap djeluje idealno centrična uzdužna sila koja sabija štap, a štap je idealno homogen i uvjeti veza s okolinom su idealno centrični, štap ostaje ravan prilikom deformiranja. No, ako sila nije idealno centrična, materijal štapa nije idealno homogen ili pak postoji nesavršenost u osloncima, pojavit će se moment savijanja uslijed uzdužne sile, koji uzrokuje promjenu zakrivljenosti središnjice štapa.



Slika 3.2. Tri stanja ravnoteže štapa opterećenog uzdužnom tlačnom silom [1]

Elastična stabilnost štapa je objašnjena Slikom 3.2. na sljedeći način; pretpostavimo djelovanje uzdužne sile F . Ako dodatno djeluje mala poremećajna sila ΔF , štap će se saviti, odnosno doći će do izvijanja štapa. Ako u tom deformiranom položaju uklonimo poremećajnu silu ili ona nestane, štap, ako je u stanju stabilne ravnoteže, će se vratiti u početno ravno stanje. Ako prilikom prestanka djelovanja poremećajne sile štap ostane u deformiranom položaju, tada je štap u stanju indiferentne ravnoteže. Ako djelovanje te male

poremećajne sile uzrokuje povećanje zakrivljenosti, moguće i do loma štapa, tada je u stanju labilne ravnoteže. Granična vrijednost uzdužne sile koja razdvaja stanje stabilne i labilne ravnoteže štapa se naziva kritična sila F_{kr} . Vrijednost kritične sile ovisi o geometriji štapa i materijalnim karakteristikama, pa razlikujemo Eulerovu i Tetmayerovu kritičnu silu, odnosno linearno područje izračuna sile prema Euleru i nelinearno područje izračuna kritične sile prema Tetmayeru [1, 4, 16].

3.1. Eulerova kritična sila izvijanja

Određivanje kritične sile pri izvijanju započet ćemo štapom, pretpostavimo okruglog presjeka, zglobno vezanog na krajevima za okolinu i opterećenog uzdužnom silom, kako je prikazano na Slici 3.2. (a). Ako je sila F manja od kritične sile izvijanja $F < F_{kr}$, štap ostaje ravan. Kada sila prijeđe vrijednost kritične sile, počinje izvijanje, kao što prikazuje Slika 3.2. (b). Na svakom presjeku možemo u ovisnosti o progibu $w(x)$ odrediti moment savijanja $M_y = Fw$, kako je prikazano na Slici 3.3. (c). Ograničenja i pretpostavke koje koristimo pri linearnom proračunu izvijanja su:

- poprečne mjere štapa su male u odnosu na duljinu, $\max\{h, b\} < l/5$,
- progibi su mali u odnosu na poprečne mjere štapa, $w_{\max} < \min\{h, b\}/10$,
- kutovi zakreta tangente na elastičnu liniju su mali, $\alpha_{\max} < 0,05$ rad,
- poprečni presjeci ostaju ravni nakon deformiranja i okomiti na elastičnu liniju,
- u štapu vlada približno jednoosno stanje naprezanja.

Diferencijalna jednadžba savijanja je $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = -\frac{F}{EI_y} w$, što drugačije zapisano daje:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \omega^2 w = 0, \quad (3.1)$$

gdje je $\omega^2 = F / (EI_y)$. Rješenje jednadžbe (3.1) je funkcija $w(x)$ čija druga derivacija ima isti oblik kao i sama funkcija sa suprotnim predznakom. Takve funkcije su $\sin[\omega x]$ i $\cos[\omega x]$, ali u ovom slučaju zbog rubnih uvjeta pomaka (zglobne veze s okolinom), $w(0) = 0$, $w(l) = 0$, uvjete zadovoljava $\sin[\omega x]$. Pretpostavimo rješenje u obliku:

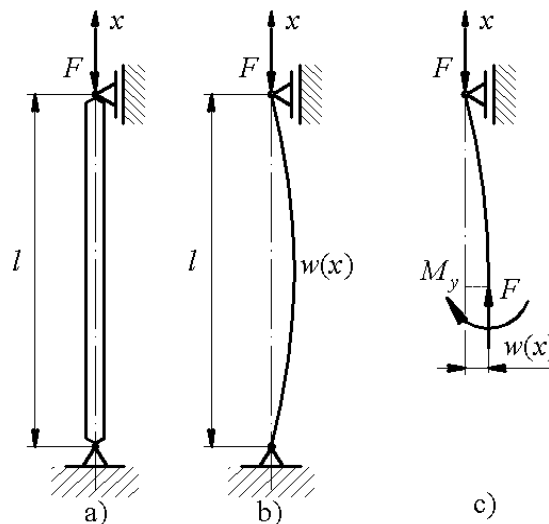
$$w = C \sin[\omega x]. \quad (3.2)$$

Vrijednost konstante $C = 0$ daje trivijalno rješenje, odnosno ravan štap. Zanimljivije je rješenje kada je $\sin[\omega l] = 0$ koje ukazuje na vrijednosti ω za koje je zadovoljeno $\sin[\omega l] = 0$. Sinusna funkcija ima nultočke kada joj je argument:

$$\omega l = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Naravno, prva vrijednost $n = 1$ daje najmanju kritičnu silu izvijanja za ovaj oblik elastične linije, pa ako uvrstimo (3.3) u $\omega^2 = F / (EI_y)$ dobit ćemo:

$$l \sqrt{\frac{F}{EI_y}} = n\pi \Rightarrow F = n^2 \frac{EI_y}{l^2} \pi^2. \quad (3.4)$$



Slika 3.3. Štap opterećen na izvijanje: a) geometrija, b) deformirani oblik, c) unutrašnji moment savijanja u deformiranom stanju

Prema jednadžbi (3.3) rješenje za progib može imati više oblika, ovisno o rubnim uvjetima koji su nametnuti, odnosno sili koja djeluje na štap. Najmanja kritična sila izvijanja za ovaj slučaj je:

$$F_{kr} = \frac{EI_y}{l^2} \pi^2. \quad (3.5)$$

Ova se sila naziva i Eulerova kritična sila. Za praksu je najbitniji prvi oblik izvijanja, određen s $n = 1$ jer će izvijanje nastupiti odmah čim sila prijeđe najmanju kritičnu vrijednost. Povećanjem sile štap bi se samo jače izvijao, do pucanja ili velike trajne deformacije, u obliku luka. Za ostale oblike izvijanja, određene s $n = 2, 3, \dots$ potrebni su drugačiji oslonci, takvi da omoguće nepomične točke na odgovarajućim mjestima na štapu. Bitno je da izvijanje nastupa oko glavne osi tromosti presjeka za koju je moment tromosti najmanji, prema principu najmanjeg otpora. U svjetlu tog uvjeta, malo ćemo izmijeniti kritičnu silu na način:

$$F_{kr} = \frac{EI_{\min}}{l^2} \pi^2. \quad (3.6)$$

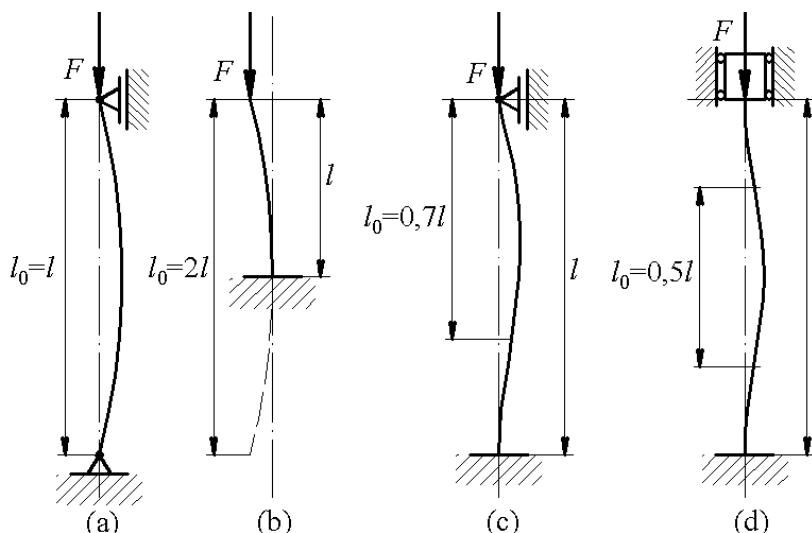
U ovim izrazima je pretpostavljen štap koji je zglobovno vezan na svojim krajevima. U slučaju da nisu takve veze s okolinom, mijenja se oblik, tj. forma izvijanja, a time i računski slobodne duljine izvijanja, kako je prikazano na Slici 3.4. Još ćemo izmijeniti izraz za kritičnu Eulerovu silu (3.6) kako bismo uveli veličinu slobodne duljine izvijanja, u skladu sa Slikom 3.4.:

$$F_{kr} = \frac{EI_{\min}}{l_0^2} \pi^2. \quad (3.7)$$

Nadalje ćemo silu izvijanja podijeliti s ploštinom poprečnog presjeka štapa, pa slijedi:

$$\frac{F_{kr}}{A} = \frac{EI_{\min} / A}{l_0^2} \pi^2. \quad (3.8)$$

Ovdje će veličina $\sigma_{kr} = F_{kr} / A$ biti označena kao kritično naprezanje, koje predstavlja prosječno naprezanje po presjeku, a ne naprezanje u nekoj točki, odnosno raspodjelu naprezanja.



Slika 3.4. Slobodne duljine izvijanja: a) dva zglobna oslonca, b) uklještenje i slobodan kraj, c) uklještenje i zglobni oslonac, d) dva uklještenja

Za presjek štapa vrijedi $I_{\min} / A = i_{\min}^2$, minimalni radijus tromosti, pa ćemo nadalje pisati:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 E \left(\frac{i_{\min}}{l_0} \right)^2. \quad (3.9)$$

Uvest ćemo novu veličinu koju zovemo vitkost štapa, prema:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}. \quad (3.10)$$

U konačnici pišemo izraz za kritično naprezanje po Eulerovu:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}. \quad (3.11)$$

Izraz (3.11) dobro opisuje kritičnu silu za izvijanje vitkih štapova, ali smanjenjem vitkosti do neke granične vrijednosti, naprezanje koje daje (3.11) sve više odskake od eksperimentalnih vrijednosti. Razlog tome je što za izvijanje kratkih (nevitkih) štapova ponašanje postaje nelinearno elastično, pa kasnije plastično. Iz tog razloga određena je granična vrijednost vitkosti za koje vrijedi (3.11), a ta vrijednost ovisi o granici proporcionalnosti materijala σ_p (približno vrijednost naprezanja tečenja), pa je ta granična vrijednost vitkosti određena sa:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \quad (3.12)$$

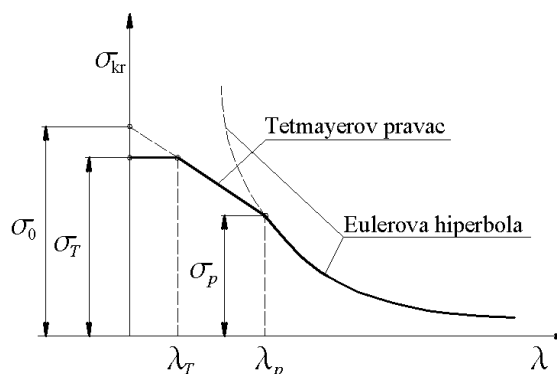
Izraz (3.11) vrijedi ako je zadovoljeno $\lambda > \lambda_p$.

3.2. Tetmayerova kritična sila izvijanja

Za štapove kojima je vitkost manja od granične prema Euleru određene (3.12), izračunavanje kritičnog naprezanja, odnosno kritične sile, ćemo provoditi prema postupku koji je predložio Tetmayer jer je to najjednostavniji način proračuna za to područje. Tetmayerov postupak ima ograničenje, pa je granična vitkost za koju vrijede Tetmayerove jednadžbe određena sa:

$$\lambda_T = \lambda_p \frac{\sigma_0 - \sigma_T}{\sigma_0 - \sigma_p}, \quad (3.13)$$

gdje su σ_0 karakteristično naprezanje koje se dobije kada se eksperimentalni podaci o izvijanju aproksimiraju pravcem, prema Slici 3.5., a σ_T je naprezanje tečenja.



Slika 3.5. Kritično naprezanje pri izvijanju ovisno o vitkosti štapa

Kritično naprezanje prema Tetmayeru je određeno:

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p) \frac{\lambda}{\lambda_p}. \quad (3.14)$$

Za neke konstrukcijske čelike navedeni su ovisnost σ_{kr} o vitkosti [1]:

$$\begin{aligned} \text{Č.0360} \quad \sigma_{kr} &= 310 - 1,14\lambda, \\ \text{Č.0460} \quad \sigma_{kr} &= 335 - 0,62\lambda, \\ \text{Č.0560} \quad \sigma_{kr} &= 470 - 2,3\lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

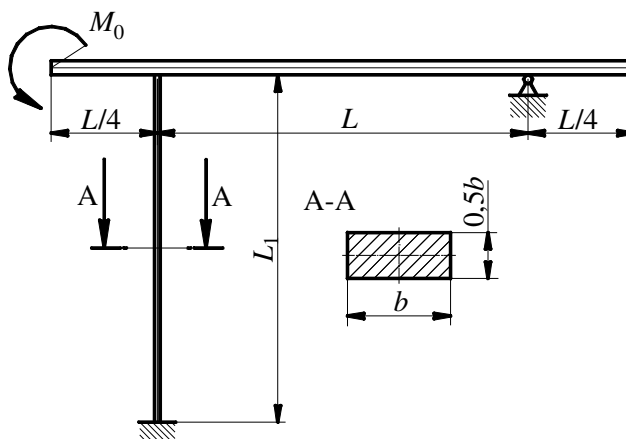
Primjer 3.1. Izvijanje štapa u konstrukciji.

Spreg M_0 opterećuje krutu gredu zanemarive mase prema Slici 3.6. Štap koji podupire gredu je kruto vezan s gredom i uklješten na drugom kraju. Odrediti najveći spreg da ne dođe do izvijanja štapa, uz faktor sigurnosti $S = 3$. Zadano:

$L = 1,5$ m, $L_1 = 2,5$ m, $b = 100$ mm, $E = 210000$ MPa, $\sigma_0 = 470$ MPa, $\sigma_T = 310$ MPa, $\sigma_p = 220$ MPa.

Ovaj slučaj veza štapa s okolinom u smislu slobodne duljine izvijanja najbliži je štapu s uklještenjima na oba kraja, prikazanom na Slici 3.4. d). Razlika između ta dva štapa je što štap na Slici 3.4. d) ima vodilicu na jednom kraju, dok ovaj zadani nema. Ipak, ta dva slučaja veza štapa s okolinom se ne razlikuju značajno. Pri malim pomacima spoja grede i štapa, štap opterećen na izvijanje je zbog krutog spoja s gredom okomit na gredu, a greda se neznatno zakreće, što je vrlo blisko slučaju prikazanom na Slici 3.4. d). Iz tog razloga uzimamo da je slobodna duljina izvijanja:

$$l_0 = 0,5l = 0,5L_1 = 1250 \text{ mm}. \quad (3.16)$$



Slika 3.6. Štap opterećen na izvijanje u konstrukciji

Minimalni moment tromosti, radijus tromosti i vitkost λ su:

$$I_{\min} = \frac{b \cdot (0,5b)^3}{12} = \frac{0,125b^4}{12} = 1041666,6 \text{ mm}^4; A = b \cdot (0,5b) = 0,5b^2 = 5000 \text{ mm}^2.$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,125b^4}{0,5b^2 \cdot 12}} = 0,14434b = 14,434 \text{ mm.}$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{1250}{14,434} = 86,6.$$
(3.17)

Idući korak je odrediti graničnu vrijednost za vitkost koja razgraničuje proračun po Euleru i Tetmayeru, a granična vitkost za proračun prema Euleru je:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{220}} = 97,06.$$
(3.18)

Provjerit ćemo i donju graničnu vrijednost vitkosti da bismo štap proračunavali na izvijanje. Granična vitkost λ_r je prema zadanim podacima:

$$\lambda_r = \lambda_p \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_p} = 97,06 \frac{470 - 310}{470 - 220} = 62,19.$$
(3.19)

Vitkost štapa je unutra područja proračuna prema Tetmayeru. Kritično naprezanje prema Tetmayeru ćemo izračunati pomoću izraza (3.14):

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p) \frac{\lambda}{\lambda_p} = 470 - (470 - 220) \frac{86,6}{97,06} = 246,94 \text{ MPa}.$$
(3.20)

Budući da je zadatkom zahtijevan faktor sigurnosti $S = 3$, izmijenit ćemo kritično naprezanje i označiti tu vrijednost kao dopuštenu:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{S} = \frac{246,94}{3} = 82,3 \text{ MPa}.$$
(3.21)

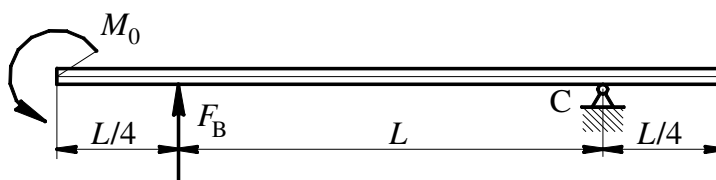
Prema tome dopuštena uzdužna sila na štap je:

$$F_{dop} = \sigma_{dop} A = 82,3 \cdot 5000 = 411566,6 \text{ N}.$$
(3.22)

Sila pritiska na štap ovisi o opterećenju, tj. spregu koji djeluje na gredu, pa ćemo postaviti uvjet ravnoteže u skladu sa Slikom 3.7.:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_0 = F_B L = F_{dop} L.$$

$$M_0 = 411566,6 \cdot 1500 = 617350000 \text{ Nmm} = 617,35 \text{ kNm.}$$
(3.23)

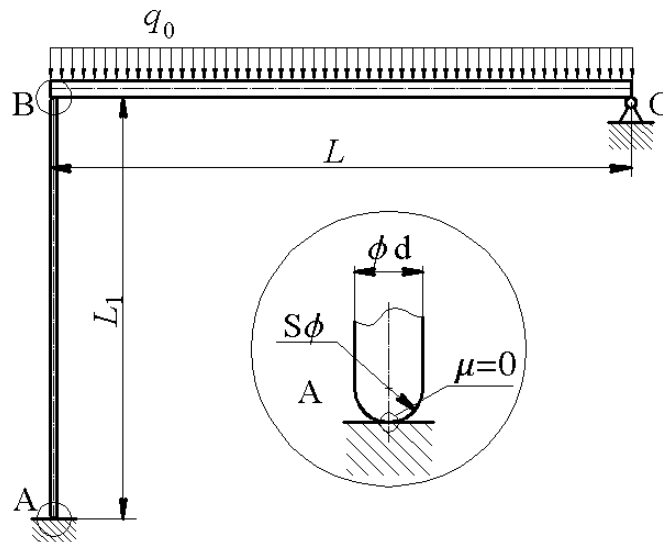


Slika 3.7. Ravnoteža grede u konstrukciji

Primjer 3.2. Izvijanje štapa u konstrukciji.

Kruta greda zanemarive mase prema Slici 3.8. opterećena je jednolikim raspodijeljenim opterećenjem i poduprta štapom A-B. Štap A-B je okruglog presjeka s kuglastim krajevima. Odrediti promjer d štapa A-B da ne dođe do izvijanja štapa, uz faktor sigurnosti $S = 4$. Zadano:

$$q_0 = 50 \text{ N/mm}, L = 5 \text{ m}, L_1 = 3 \text{ m}, E = 210000 \text{ MPa}, \sigma_0 = 310 \text{ MPa}, \sigma_r = 220 \text{ MPa}, \sigma_p = 180 \text{ MPa}.$$



Slika 3.8. Štap opterećen na izvijanje u konstrukciji

Ako idealiziramo dodir kuglastog kraja štapa i podloge, odnosno grede, tada ta veza omogućuje rotaciju štapa oko bilo koje osi koja prolazi kroz dodirnu plohu. Idealizacija tog dodira znači zanemarivanje deformacija koje utječu na mogućnosti zakretanja štapa, odnosno naprezanja, tj. sile na dodirnoj površini pružaju otpor tom zakretanju. Ovaj slučaj veza štapa s okolinom u smislu slobodne duljine izvijanja najbližiji je štapu sa zglobnim vezama na oba kraja, prikazanom na Slici 3.4. a). Iz tog razloga uzimamo da je slobodna duljina izvijanja:

$$l_0 = L_1 = 3000 \text{ mm} . \quad (3.24)$$

Ovdje ne poznavajući promjer štapa ne poznajemo vitkost, koja utječe na kritično naprezanje, pa ćemo postaviti uvjet koliko najmanje kritično naprezanje mora moći podnijeti štap prema Euleru, poznavajući opterećenje i zahtijevani faktor sigurnosti, a to će ovisiti o promjeru. S druge strane ćemo odrediti kako ovisi kritično naprezanje prema Euleru o promjeru te dobiti jednadžbu s jednom nepoznanicom. Kada izračunamo promjer i zaokružimo ga, moramo provjeriti vrijedi li i dalje uvjet proračuna prema Euleru. Za zadane parametre materijala granična vrijednost vitkosti za proračun prema Euleru je:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3 . \quad (3.25)$$

Radius tromosti za okrugli presjek ćemo izračunati prema:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{\frac{\pi d^2}{4}}} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4} . \quad (3.26)$$

Vitkost zadanog štapa je:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{4 \cdot 3000}{d} = \frac{12000}{d} . \quad (3.27)$$

Sila koja se javlja u štapu, i naprezanje u štapu, slijedi iz ravnoteže grede i iznosi:

$$\begin{aligned}\sum M_c = 0 &\Rightarrow F_B L = q_0 \frac{L^2}{2} \Rightarrow F_B = q_0 \frac{L}{2} = 50 \frac{5000}{2} = 125000 \text{ N.} \\ \sigma_x &= \frac{F_B}{A} = \frac{125000}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{50000}{\pi d^2} \text{ N/mm}^2. \\ S &= \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_x} \Rightarrow \sigma_{kr} = S \sigma_x = 4 \frac{50000}{\pi d^2} = \frac{200000}{\pi d^2} \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Iduće ćemo postaviti vitkost i prema njoj kritično naprezanje prema Euleru kao funkciju promjera:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{210000}{\left(\frac{12000}{d}\right)^2} = \pi^2 \frac{21 d^2}{14400} \text{ N/mm}^2. \quad (3.29)$$

Izjednačavanjem izraza za “najmanje potrebno” kritično naprezanje (3.28) i ono prema Euleru (3.29) dobit ćemo jednadžbu s promjerom kao nepoznicom:

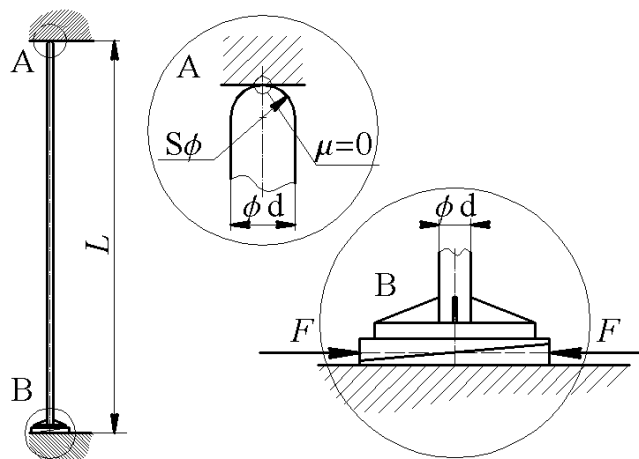
$$\begin{aligned}\frac{200000}{\pi d^2} &= \pi^2 \frac{21 d^2}{14400} \Rightarrow \frac{200000 \cdot 14400}{21 \pi^3} = d^4 \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{288 \cdot 10^7}{21 \pi^3}} = 45,86 \text{ mm.} \\ \left. \begin{aligned} \lambda(d = 45,86) &= \frac{12000}{45,86} = 261,66 \\ \lambda(d = 50) &= \frac{12000}{50} = 240 \end{aligned} \right\} &\text{odabrano } d = 50 \text{ mm.}\end{aligned}\quad (3.30)$$

U jednadžbama (3.30) nakon izračuna promjera provjerava se vitkost za odabrani promjer. Cilj je provjeriti koliko je ta vitkost blizu granične λ_p , da bi se moglo odabrati standardiziran promjer štapa. Čitatelj se može uvjeriti uvrštavanjem zaokruženog promjera $d = 50 \text{ mm}$ u jednadžbe (3.28) i (3.29) kritično naprezanje takvo da je faktor sigurnosti veći od zahtijevanog.

Primjer 3.3. Izvijanje štapa između krutih površina.

Štap A-B okruglog (prstenastog) presjeka s jednim kuglastim i drugim pločastim krajem, kako je prikazano na Slici 3.9. služi za držanje polica. Način ugradnje je sabijanjem između krutih stropa i poda. Sabijanje se postiže pomoću klinova na podu. Pretpostavka je da su paralelne plohe klinova koje su u dodiru s podom, odnosno donjom plohom ploče na donjem kraju stupa paralelne i prilikom sabijanja nema bočnih sila na štap. Isto tako nema spregova po duljini štapa nakon ugradnje. Odrediti najveću silu na klinovima da ne dođe do izvijanja štapa, uz faktor sigurnosti $S = 5$. Pretpostavka je da je faktor trenja na svim metalnim površinama $\mu = 0,1$, a kut nagiba klina je $\alpha = 3^\circ$. Zadano:

$$L = 5 \text{ m}, d = 100 \text{ mm}, d_u = 90 \text{ mm}, E = 210000 \text{ MPa}, \sigma_0 = 310 \text{ MPa}, \sigma_T = 220 \text{ MPa}, \sigma_p = 180 \text{ MPa}.$$



Slika 3.9. Štap između dva uklještenja

Ovaj slučaj veza štapa s okolinom u smislu slobodne duljine izvijanja najbliži je štapu s uklještenjem na jednom kraju i zglobovnom vezom na drugom, prikazanom na Slici 3.4. c). Ploča na donjem dijelu štapa predstavlja uklještenje, ako zanemarimo male deformacije uslijed mogućih nesavršenosti klinova i same ploče. Drugim riječima, donja ploča ne dopušta zakretanje štapa u smislu savijanja jer je „dovoljno“ šira od štapa. Iz tog razloga uzimamo da je slobodna duljina izvijanja:

$$l_0 = 0,7L = 0,7 \cdot 5000 = 3500 \text{ mm} . \quad (3.31)$$

Za zadane parametre materijala granična vrijednost vitkosti za proračun prema Euleru je:

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3 . \quad (3.32)$$

Radius tromosti za prstenasti presjek ćemo izračunati prema:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi(d^4 - d_u^4)/64}{\pi(d^2 - d_u^2)/4}} = \sqrt{\frac{(d^2 + d_u^2)}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{100^2 + 90^2} = 33,634 \text{ mm} . \quad (3.33)$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{3500}{33,634} = 104,06 . \quad (3.34)$$

Vitkost štapa je unutar područja proračuna prema Tetmayeru. Kritično naprezanje prema Tetmayeru ćemo izračunati pomoću izraza (3.14):

$$\sigma_{kr} = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_p) \frac{\lambda}{\lambda_p} = 310 - (310 - 180) \frac{104,06}{107,3} = 183,93 \text{ MPa} . \quad (3.35)$$

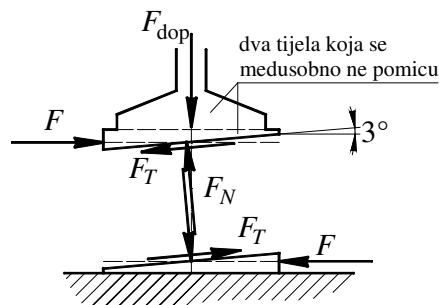
Dopušteno naprezanje u štapu je manje od kritičnog zbog zahtijevanog faktora sigurnosti pa slijedi:

$$\sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{S} = \frac{183,93}{5} = 36,786 \text{ MPa} . \quad (3.36)$$

Iz ovoga slijedi da je dopuštena sila u štapu:

$$F_{dop} = \sigma_{dop} A = 36,786 \cdot \pi \frac{(d^2 - d_u^2)}{4} = 36,786 \cdot \pi \frac{(100^2 - 90^2)}{4} = 54894,15 \text{ N} . \quad (3.37)$$

Silu u štapu s druge strane uzrokuje međusobno pritiskanje klinova, a sile među klinovima su prikazane na Slici 3.10.



Slika 3.10. Sile na klinovima

Ravnoteža gornjeg klina sa štapom je opisana jednadžbama:

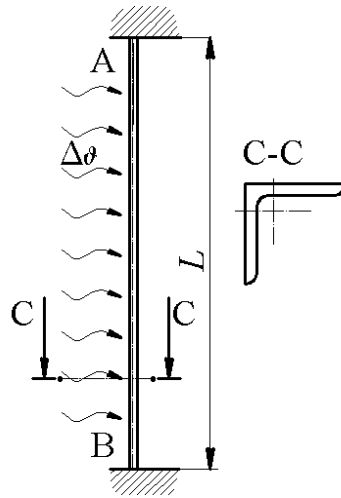
$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\Rightarrow F_{\text{dop}} - F_N \cos(3^\circ) + F_T \sin(3^\circ) = 0. \quad (a) \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow F - F_N \sin(3^\circ) - F_T \cos(3^\circ) = 0. \quad (b) \\ F_T &= \mu F_N = 0,1 F_N.\end{aligned}\quad (3.38)$$

$$(a) \Rightarrow F_{\text{dop}} = F_N 0,9986 - 0,1 F_N 0,0523 \Rightarrow F_N = \frac{F_{\text{dop}}}{0,9986 - 0,00523} = 55260 \text{ N}.$$

$$(b) \Rightarrow F = F_N 0,0523 + 0,1 F_N 0,9986 = F_N (0,0523 + 0,09986) = 8338,73 \text{ N}.$$

Primjer 3.4. Izvijanje uslijed promjene temperature.

Štap A-B načinjen od standardnog istokračnog profila oznake L50x6 ukliješten na oba kraja, kako je prikazano na Slici 3.11. opterećen je toplinski, povišenjem temperature. Odrediti najveće povišenje temperature da ne dođe do izvijanja štapa, uz faktor sigurnosti $S = 2$. Zadano: $L = 3 \text{ m}$, $I_1 = 20,4 \text{ cm}^4$, $I_2 = 5,24 \text{ cm}^4$, $A = 5,69 \text{ cm}^2$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $\sigma_0 = 310 \text{ MPa}$, $\sigma_T = 220 \text{ MPa}$, $\sigma_p = 180 \text{ MPa}$, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.



Slika 3.11. Štap opterećen na izvijanje povišenjem temperature

Povišenjem temperature štap ima težnju povećati svoju duljinu. U tome ga sprečavaju ukliještenja, te se javljaju reakcije u ukliještenjima koje drže štap na početnoj duljini. Prvo ćemo postaviti jednadžbu koja će opisivati promjenu reakcije s promjenom temperature, kako je prikazano na Slici 3.12. Povišenjem temperature štap bi se duljina štapa promijenila za:

$$\Delta L^\theta = L \Delta \vartheta \alpha, \quad (3.39)$$

gdje je $\Delta \vartheta$ povišenje temperature a α koeficijent toplinskog rastezanja. Uslijed temperaturnog širenja javlja se reakcija u ukliještenjima koja je proporcionalna povišenju temperature prema:

$$\Delta L^F = -\frac{F_R L}{AE}. \quad (3.40)$$

Zbrojeno ta dva produljenja moraju dati nulu, pa slijedi sila reakcije:

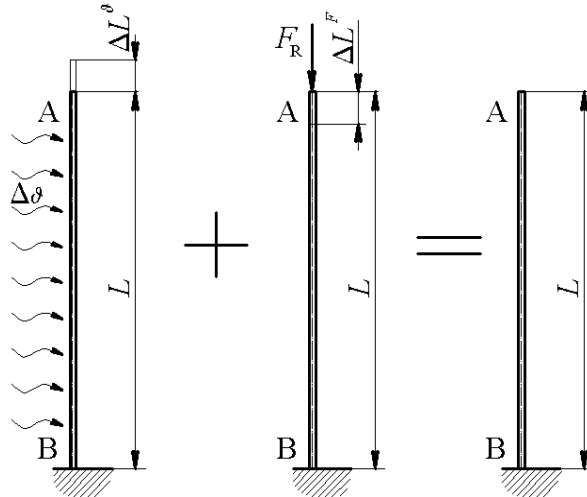
$$\begin{aligned}\Delta L^\theta + \Delta L^F = 0 &\Rightarrow L \Delta \vartheta \alpha - \frac{F_R L}{AE} = 0. \\ F_R &= AE \Delta \vartheta \alpha.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Reakcija u ukliještenjima izaziva tlačno naprezanje po štapu u iznosu:

$$\sigma_x(F_R(\vartheta)) = \frac{F_R}{A} = E \Delta \vartheta \alpha. \quad (3.42)$$

Za štap prema Slici 3.11. slobodna duljina izvijanja je $l_0 = 0,5 L = 0,5 \cdot 3000 = 1500$ mm. Minimalni radijus tromosti je $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{5,24 \cdot 10^4}{569}} = 9,6$ mm. Slijedi da je vitkost štapa:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{1500}{9,6} = 156,31. \quad (3.43)$$



Slika 3.12. Izračunavanje reakcije pri zagrijavanju štapa

Granična vitkost štapa da bi ga mogli proračunati na izvijanje prema Euleru je $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3$. Kritično naprezanje za štap za koji je $\lambda > \lambda_p$ je:

$$\sigma_{kr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \frac{210000}{156,31^2} = 84,83 \text{ N/mm}^2. \quad (3.44)$$

Uz zadani faktor sigurnosti $S = 2$ dopušteno naprezanje po presjeku je:

$$\sigma_{dop} = \sigma_{kr} / S = 84,83 / 2 = 42,415 \text{ N/mm}^2. \quad (3.45)$$

S obzirom da je naprezanje po presjeku:

$$\sigma_x = \frac{F_R}{A} = E \Delta \vartheta \alpha = 42,415. \quad (3.46)$$

$$\Delta \vartheta = \frac{42,415}{E \alpha} = \frac{42,415}{210000 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 16,8 \text{ K}.$$

Primjer 3.5. Izvijanje slobodnog štapa.

Štap A-B načinjen od standardnog istokračnog profila oznake L60x5 uklješten je na jednom kraju, kako je prikazano na Slici 3.13. i opterećen silom na slobodnom kraju. Odrediti najveću duljinu da ne dođe do izvijanja štapa, uz faktor sigurnosti $S = 3$. Zadano:

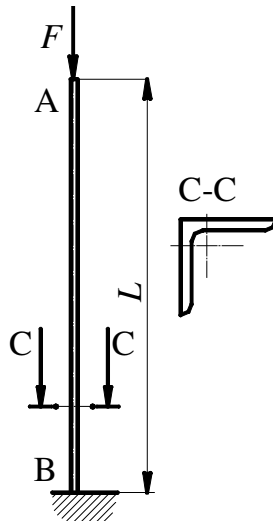
$$F = 5000 \text{ N}, I_1 = 30,7 \text{ cm}^4, I_2 = 8,03 \text{ cm}^4, A = 5,82 \text{ cm}^2,$$

$$E = 210000 \text{ MPa}, \sigma_0 = 310 \text{ MPa}, \sigma_T = 220 \text{ MPa}, \sigma_p = 180 \text{ MPa}.$$

Budući da ne znamo kolika je vitkost štapa, odredit ćemo prvo graničnu vitkost za koju još možemo odrediti kritično naprezanje prema Euleru, a to je $\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{180}} = 107,3$. Nadalje ćemo izračunati

minimalni radijus tromosti presjeka, $i_{\min} = \sqrt{I_2 / A} = \sqrt{8,03 \cdot 10^4 / 582} = 11,75$ mm. Vitkost ćemo izraziti kao funkciju duljine štapa, s tim da je $l_0 = 2L$:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{2L}{11,75}. \quad (3.47)$$



Slika 3.13. Štap s uklještenjem opterećen na izvijanje

Naprezanje po presjeku je iz zadanog opterećenja:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{5000}{582} = 8,59 \text{ N/mm}^2. \quad (3.48)$$

Dopušteno naprezanje je $\sigma_{\text{dop}} = \sigma_{\text{kr}} / S$ pa slijedi da kritično naprezanje mora biti najmanje $\sigma_{\text{kr}} \geq S \sigma_{\text{dop}} = S \sigma_x = 3 \cdot 8,59 = 25,77 \text{ N/mm}^2$. To nam daje vrijednost za provjeru kritičnog naprezanja prema Euleru, pa slijedi:

$$\sigma_{\text{kr}} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \rightarrow \lambda^2 = \frac{E \pi^2}{\sigma_{\text{kr}}} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{E \pi^2}{\sigma_{\text{kr}}}} = \sqrt{\frac{210000 \pi^2}{25,77}} = 283,6. \quad (3.49)$$

Time dobivamo graničnu vrijednost vitkosti za koju je zadovoljen uvjet faktora sigurnosti. Iz vitkosti štapa slijedi duljina prema (3.47):

$$283,6 = \frac{2L}{11,75} \Rightarrow L = 283,6 \cdot 11,75 / 2 = 1666,15 \text{ mm}. \quad (3.50)$$

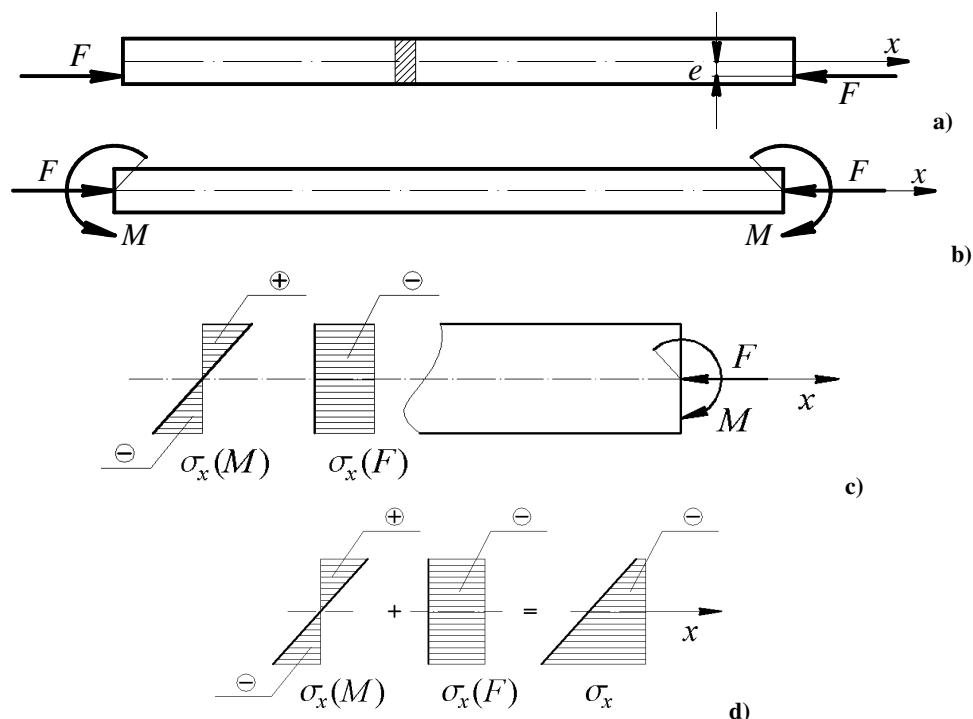
4. SLOŽENO OPTEREĆENJE

Vrlo često će se u tehničkoj praksi dogoditi da je neki geometrijski jednostavan element (ograničimo se pritom na ravne štapove) složeno opterećen. Složeno opterećenje, statičko, je najjednostavnije predstaviti kao istovremeno djelovanje jednostavnih opterećenja koja su spomenuta dosad u *Čvrstoći I*, a to su uzdužno (aksijalno) opterećenje na sabijanje ili rastezanje, uvijanje, savijanje ili smicanje [1]. Pritom komponente naprezanja koje ta jednostavna opterećenja uzrokuju izračunavamo zasebno za svako opterećenje, pa prema principu superpozicije zbrajamo u ukupno naprezanje za zadani nosač. U razmatranje složenih opterećenja ne uvodimo izvijanje. Kako promatramo samo linearno elastične probleme, vrijedit će princip superpozicije za sve kombinacije opterećenja. Naprezanja koja uzrokuju pojedina opterećenja ćemo na odgovarajući način zbrajati u slučaju složenih opterećenja.

Kombinacija opterećenja, odnosno naprezanja koja se pri tome javljaju, utječu na provjeru kriterija čvrstoće [1, 4, 16]. Istovremeno postojanje više komponenata naprezanja u nekoj točki tijela predstavlja svojevrstni problem za provjeru čvrstoće. Za materijal od kojeg je načinjena konstrukcija (element) poznato je najčešće kolika je granica proporcionalnosti, elastičnosti, pucanja (loma) za jednoosno stanje naprezanja, najčešće rastezanje ili sabijanje. Ispitivanje materijala (ispitni uzorak) za višeosno stanje naprezanja je skupo i ne provodi se za većinu materijala. To je razlog da preračunavamo višeosno stanje naprezanja u jednoosno, koje onda možemo usporediti s podacima dobivenim ispitivanjem ispitnog uzorka s jednoosnim stanjem naprezanja.

4.1. Savijanje i osno opterećenje

Analizirat ćemo slučaj opterećenja štapa pravokutnog poprečnog presjeka opterećenog tlačnom uzdužnom silom, ekscentrično, prikazano na Slici 4.1.



Slika 4.1. Složeno opterećen štapa: a) geometrija i opterećenje, b) reducirano opterećenje na težišnicu, c) komponente naprezanja, d) ukupno naprezanje

Na Slici 4.1. a) prikazan je štap pravokutnog poprečnog presjeka opterećen silom F koja je ekscentrična za iznos e prema težištu presjeka. To možemo zamijeniti silom u težištu presjeka i dodatnim spregom iznosa $M = Fe$, zbog redukcije sile u središnju os, kako je prikazano na Slici 4.1. b). Sila F uzrokuje normalnu komponentu naprezanja σ_x iznosa:

$$\sigma_x(F) = -\frac{F}{A}. \quad (4.1)$$

Ovdje je bitno napomenuti da je prema Slici 4.1. a) sila F koncentrirana sila, no to nije nužno slučaj u stvarnosti; ovdje je simbolički prikazana sila kao koncentrirana, dok u stvarnosti može djelovati „raspodijeljeno“ kao npr. preko zglobnog oslonca. u slučaju koncentrirane sile, izrazi za naprezanja vrijede na udaljenosti od oko $\min\{h, b\}$, prema St Venantovom principu [1] koncentracije naprezanja, gdje su b, h mjere poprečnog presjeka. Raspodjela naprezanja uslijed sile je prikazana na Slici 4.1. c). Spreg M uzrokuje također normalnu komponentu naprezanja σ_x iznosa:

$$\sigma_x(M) = \frac{Fe}{I_y} z. \quad (4.2)$$

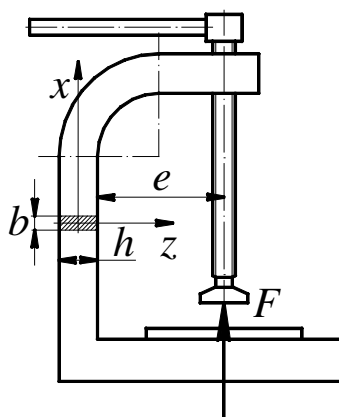
Za izraz (4.2) podrazumijeva se da je os y okomita na ravninu papira i usmjerena iz papira. Raspodjela naprezanja uslijed sprega je prikazana na Slici 4.1. c). Ukupno naprezanje je zbroj naprezanja sile i sprega i iznosi:

$$\sigma_x = \sigma_x(F) + \sigma_x(M) = -\frac{F}{A} + \frac{Fe}{I_y} z. \quad (4.3)$$

Ukupno naprezanje po presjeku štapa je prikazano na Slici 4.1. d).

Primjer 4.1. Savijanje i osno opterećenje.

Na Slici 4.2. prikazana je vijčana preša. Navojnim vretenom ostvaruje se sila F . Središnji dio preše ima pravokutni poprečni presjek mjera b, h . Odrediti raspodjelu naprezanja kao i najveće naprezanje u sredini presjeka. Zadano: $F = 16000$ N, $e = 0,16$ m, $b = 20$ mm, $h = 80$ mm.



Slika 4.2. Vijčana preša

Središnji dio štapa, odnosno stupa preše, je opterećen istovremeno na rastezanje i savijanje zbog ekscentričnosti sile F prema težištu presjeka stupa. Naprezanje uslijed rastezanja jednako je:

$$\sigma_x(F) = \frac{F}{A} = \frac{16000}{20 \cdot 80} = 10 \text{ N/mm}^2. \quad (4.4)$$

Naprezanje uslijed sprega jednako je:

$$\sigma_x(M) = \frac{F(e + h/2)}{I_y} z = \frac{16000 \cdot 200}{\frac{20 \cdot 80^3}{12}} z = 3,75 z \text{ N/mm}^2. \quad (4.5)$$

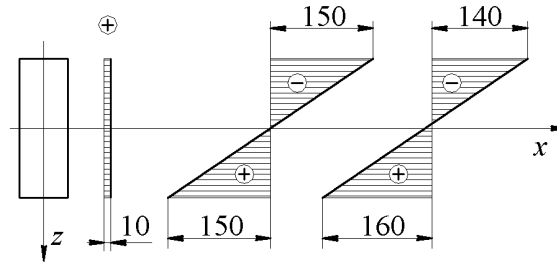
Ukupno naprezanje je jednako zbroju naprezanja određenih s (4.4) i (4.5):

$$\sigma_x = 10 + 3,75 z \text{ N/mm}^2. \quad (4.6)$$

Najveće naprezanje je na vanjskim ploham presjeka:

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_{\min} &= 10 - 3,75 \cdot 40 = -140 \text{ N/mm}^2, \\ (\sigma_x)_{\max} &= 10 + 3,75 \cdot 40 = 160 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\quad (4.7)$$

Raspodjela naprezanja po presjeku stupa prikazana je na Slici 4.3.

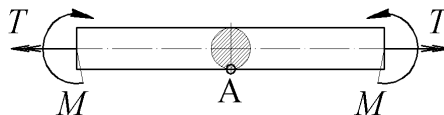


Slika 4.3. Raspodjela naprezanja u stupu vijčane preše

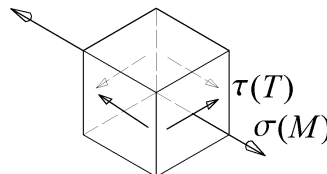
4.2. Savijanje i uvijanje okruglih štapova

Kombinacija savijanja i uvijanja okruglih štapova je vrlo česta u tehničkoj praksi. Ovdje ćemo pretpostaviti da je zadovoljen uvjet jednake čvrstoće ili bolje rečeno, granice tečenja, pri opterećenju na sabijanje i rastezanje. Razlog tome je što ćemo kasnije u teorijama čvrstoće postaviti jednadžbu koja ne uzima u obzir predznak normalne komponente naprezanja, radi općenitosti, pa stoga mora biti zadovoljen ovaj uvjet. Ako promatramo štap opterećen momentom uvijanja i savijanjem, posmična komponenta naprezanja uslijed uvijanja biti će najveća na vanjskoj površini. Normalna komponenta naprezanja uslijed savijanja biti će opet najveća na vanjskoj površini.

Savijanje može biti čisto savijanje, ali je vrlo čest slučaj poprečnog savijanja (savijanja silama), pa će posmična komponenta naprezanja uslijed poprečnih sila biti najveća u sredini štapa, a na vanjskoj površini jednaka nuli. Stoga ćemo jednako promatrati slučaj čistog savijanja i poprečnog savijanja u kontekstu utjecaja na naprezanje. Kasnije za dimenzioniranje je bitno najveće naprezanje pa ćemo zanemariti posmičnu komponentu naprezanja uslijed mogućih poprečnih sila. Na Slici 4.4. prikazan je štap opterećen na savijanje i uvijanje. Moment savijanja je označen M , a moment uvijanja je označen T . Posmična komponenta naprezanja uslijed uvijanja i normalna komponenta uslijed savijanja prikazane se na diferencijalnom elementu na vanjskoj plohi na Slici 4.5.



Slika 4.4. Štap opterećen na savijanje i uvijanje



Slika 4.5. Stanje naprezanja u točki A

Na Slici 4.5. prikazane su komponente naprezanja u točki A štapa sa Slike 4.4. Komponente naprezanja jednake su:

$$\tau = \frac{T}{W_p}; \sigma = \frac{M}{W}.\quad (4.8)$$

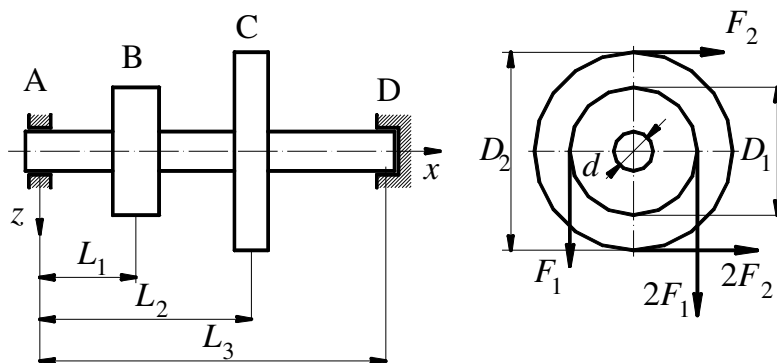
U jednadžbama (4.8) $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ je polarni moment otpora, a $W = \frac{\pi d^3}{32}$ je aksijalni moment otpora.

Primjer 4.2. Savijanje i uvijanje štapa.

Na Slici 4.6. prikazano je vratilo promjera d s remenicama. Remenicom B, promjera D_1 , dovodi se snaga P . Zanedajući gubitke, remenicom C, promjera D_2 , ta se snaga odvodi. Odrediti raspodjelu komponenata naprezanja u kritičnom presjeku. Zadano:

$$P = 1500 \text{ W}, n = 1440 \text{ min}^{-1}, d = 20 \text{ mm},$$

$$D_1 = 240 \text{ mm}, D_2 = 360 \text{ mm}, L_1 = 200 \text{ mm}, L_2 = 300 \text{ mm}, L_3 = 500 \text{ mm}.$$



Slika 4.6. Vratilo opterećeno na savijanje i uvijanje

Vratilo prenosi snagu $P = T\omega$ na dijelu od, pojednostavljeno promatrano, sredine remenice B do sredine remenice C. Moment uvijanja T je veličine:

$$P = T\omega \rightarrow T = \frac{P}{\omega} \left| \omega = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{1440}{60} = 150,8 \text{ s}^{-1} \right|.$$

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{1500}{150,8} = 9,947 \text{ Nm.} \quad (4.9)$$

Najveća vrijednost posmične komponente naprezanja uslijed uvijanja vratila jednaka je:

$$\tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{9,947}{\frac{\pi 20^3}{16}} = \frac{9,947 \cdot 10^3}{1570,796} = 6,332 \text{ N/mm}^2. \quad (4.10)$$

Moment uvijanja na remenicama je ostvaren obodnom silom kao razlikom sila u krakovima remena. Za remenicu B obodna sila $(F_o)_1$ i sile u krakovima remena su:

$$(F_o)_1 = \frac{T}{r_1} = \frac{9,947 \cdot 10^3}{240/2} = 82,89 \text{ N.} \quad (4.11)$$

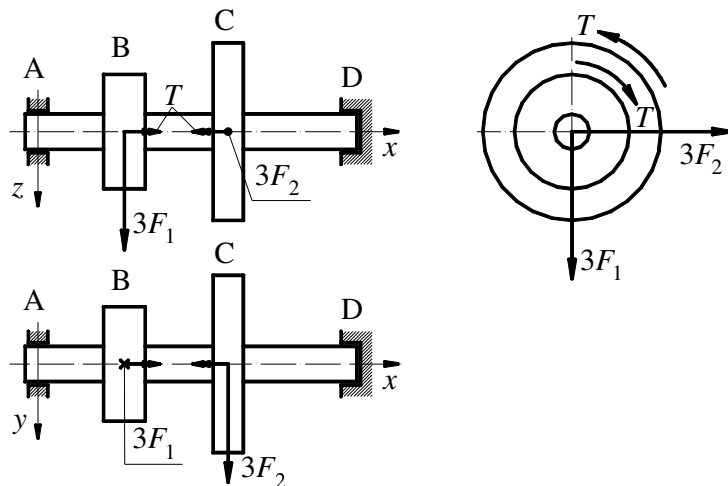
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 2F_1 r_1 - F_1 r_1 = (F_o)_1 r_1 \rightarrow F_1 = (F_o)_1 = 82,89 \text{ N.}$$

Za remenicu C obodna sila $(F_o)_2$ i sile u krakovima remena su:

$$(F_o)_2 = \frac{T}{r_2} = \frac{9,947 \cdot 10^3}{360/2} = 55,26 \text{ N.} \quad (4.12)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 2F_2 r_2 - F_2 r_2 = (F_o)_2 r_2 \rightarrow F_2 = (F_o)_2 = 55,26 \text{ N.}$$

Na Slici 4.7. prikazane su reducirane sile na središnjicu vratila i pripadni momenti.



Slika 4.7. Rezultirajuća opterećenja na vratilu

Sile reducirane na središnjicu vratila djeluju u dvije koordinatne ravnine, pa ćemo iduće izračunati momente savijanja na mjestima koncentriranih sila. Momenti savijanja i uvijanja su prikazani na Slici 4.8.

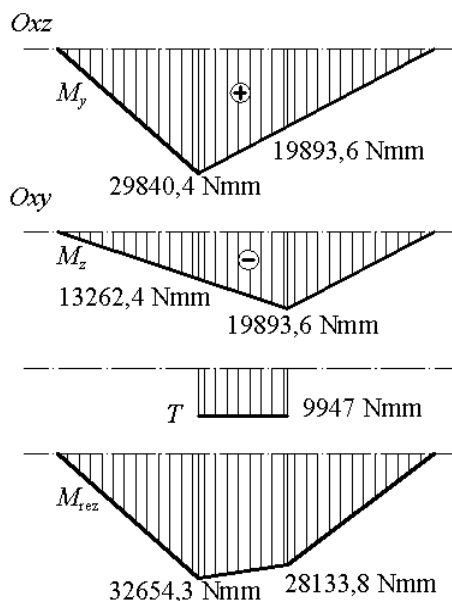
Oxz :

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \rightarrow F_A^z - 3F_1 + F_D^z = 0. \\ \sum M_y &= 0 \rightarrow 3F_1L_1 + F_D^zL_3 = 0. \\ F_D^z &= 3F_1L_1 / L_3 = 3 \cdot 82,89(200 / 500) = 99,468 \text{ N.} \\ F_A^z &= 3F_1 - F_D^z = 3 \cdot 82,89 - 99,468 = 149,202 \text{ N.}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Oxy :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \rightarrow F_A^y - 3F_2 + F_D^y = 0. \\ \sum M_z &= 0 \rightarrow 3F_2L_2 + F_D^yL_3 = 0. \\ F_D^y &= 3F_2L_2 / L_3 = 3 \cdot 55,26(300 / 500) = 99,468 \text{ N.} \\ F_A^y &= 3F_2 - F_D^y = 3 \cdot 55,26 - 99,468 = 66,312 \text{ N.}\end{aligned}\quad (4.14)$$

Budući da na presjecima B i C koji su kritični (odnosno, jedan od tih će biti kritičan) djeluju momenti savijanja u dvije okomite ravnine, možemo izračunati rezultirajući moment.



Slika 4.8. Momenti savijanja i uvijanja

Budući da je savijanje u dvije ravnine, odredit ćemo rezultantu raspodjelu normalne komponente napreznja uslijed savijanja momentima M_y i M_z . Ekstremne vrijednosti ćemo dobiti izjednačavanjem derivacije funkcije raspodjele napreznja $\sigma_x(y, z)$ uvođenjem uvjeta koji opisuje konturu (rub) prema:

$$r^2 = y^2 + z^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{r^2 - z^2}. \quad (4.15)$$

Odabrat ćemo traženje ekstrema na pozitivnoj koordinati y jer je prema Slici 4.9. na toj strani maksimum komponente napreznja. Radi općenitosti izvoda nećemo dodavati oznake točke na vratilu (u smislu koordinate x) u kojoj tražimo ekstreme. Raspodjela napreznja u slučaju djelovanja momenata savijanja oko obje koordinatne osi (glavne osi tromosti presjeka) je $\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$. Slijedi:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I} z - \frac{M_z}{I} \sqrt{r^2 - z^2} \quad \left| \frac{d}{dz} = 0 \rightarrow \frac{M_y}{I} - \frac{M_z}{I} \frac{1}{2} \frac{-2z}{\sqrt{r^2 - z^2}} = 0. \right. \quad (4.16)$$

$$\frac{z}{\sqrt{r^2 - z^2}} = -\frac{M_y}{M_z} \quad \left| \right|^2 \Rightarrow \frac{z^2}{r^2 - z^2} = \left(\frac{M_y}{M_z} \right)^2 \Rightarrow z^2 \left(1 + \left(\frac{M_y}{M_z} \right)^2 \right) = r^2 \left(\frac{M_y}{M_z} \right)^2.$$

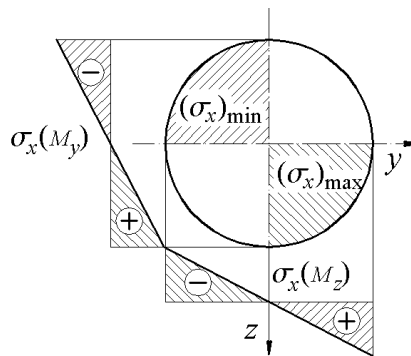
$$z^2 = r^2 \left(\frac{M_y}{M_z} \right)^2 \frac{M_z^2}{M_y^2 + M_z^2} = r^2 \frac{M_y^2}{M_y^2 + M_z^2}. \quad (4.17)$$

$$z_0 = \pm r \frac{M_y}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}} \Rightarrow y_0 = \pm \sqrt{r^2 - z_0^2} = \pm r \frac{M_z}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}.$$

Uvrštavanjem vrijednosti za položaj ekstremne vrijednosti napreznja, iz (4.17) u raspodjelu napreznja, dobit ćemo iznos ekstrema normalne komponente napreznja. Ovdje ćemo uvesti dodatni uvjet da su ekstremne vrijednosti napreznja raspodijeljene prema Slici 4.9.

$$(\sigma_x)_{\max} = \frac{1}{I} \left(M_y \left(r \frac{M_y}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}} \right) + |M_z| \left(r \frac{|M_z|}{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}} \right) \right) = \quad (4.18)$$

$$\frac{r}{I} \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \frac{r}{I} M_{\text{rez}} \Rightarrow M_{\text{rez}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}.$$



Slika 4.9. Raspodjela napreznja po presjeku uslijed savijanja

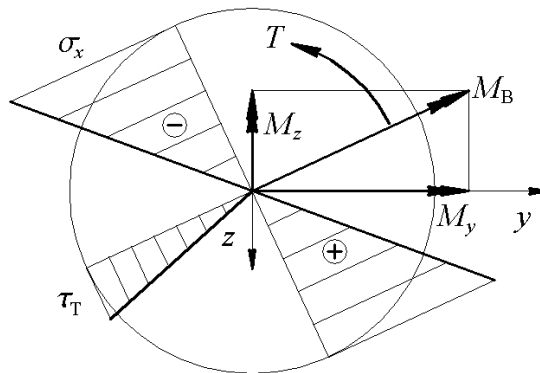
Rezultirajući momenti savijanja u presjecima B i C prema (4.18) su:

$$M_B = \sqrt{29840,4^2 + 13262,4^2} = 32654,9 \text{ Nmm}, M_C = \sqrt{19893,6^2 + 19893,6^2} = 28133,8 \text{ Nmm}. \quad (4.19)$$

Komponente napreznja u kritičnom presjeku su jednake:

$$\text{B: } \sigma_x = \frac{M_B}{I_y} r; \tau_T = \frac{T}{I_p} r. \quad (4.20)$$

U izrazu za normalnu komponentu naprezanja u (4.20) ne uzimamo u obzir predznak naprezanja, kako je već objašnjeno. Raspodjela komponenata naprezanja u presjeku B je prikazana na Slici 4.10.



Slika 4.10. Komponente naprezanja uslijed savijanja i uvijanja

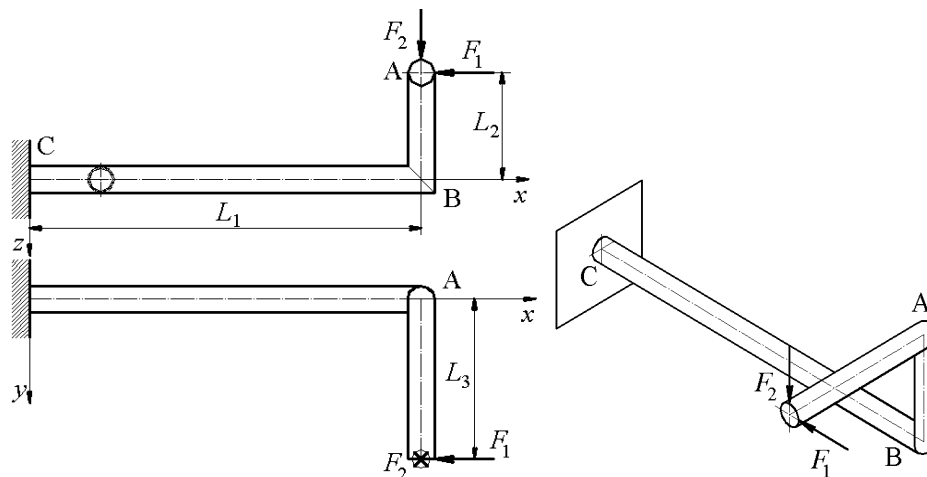
4.3. Opći slučaj opterećenja okruglih štapova

Osim kombinacija opterećenja spomenutih u prethodna dva poglavlja, u općem slučaju može postojati kombinacija savijanja, uvijanja i uzdužnog opterećenja. Na Primjeru 4.3. ćemo prikazati izračun komponenata naprezanja za takav slučaj opterećenja.

Primjer 4.3. Savijanje, uvijanje i uzdužno opterećenje

Na Slici 4.11. prikazan je nosač načinjen od cijevi promjera D/d opterećen silama. Odrediti raspodjelu komponenata naprezanja u kritičnom presjeku. Zadano:

$F_1 = 1500 \text{ N}$, $F_2 = 1000 \text{ N}$, $D = 48 \text{ mm}$, $d = 41 \text{ mm}$, $L_1 = 1000 \text{ mm}$, $L_2 = 200 \text{ mm}$, $L_3 = 400 \text{ mm}$.



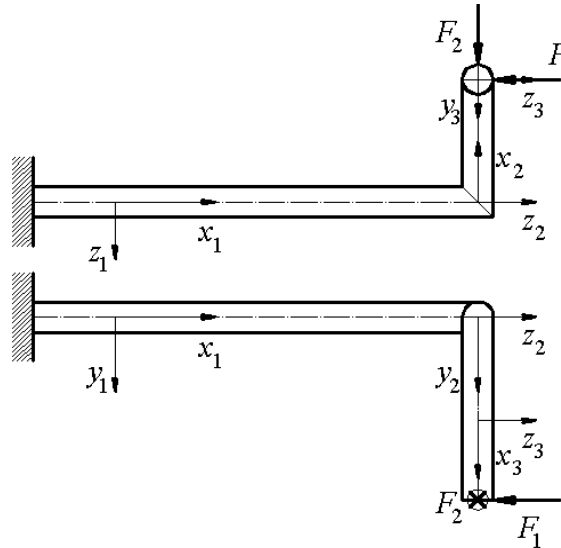
Slika 4.11. Prostorni konzolni nosač

Ovo je slučaj općeg opterećenja štapa. Sile uzrokuju uzdužno sabijanje dijela duljine L_1 i L_2 , savijanje svih dijelova i uvijanje dijelova duljine L_1 i L_2 . Uvest ćemo lokalne koordinatne sustave kako bismo lakše opisali raspodjele komponenata naprezanja, kako je prikazano na Slici 4.12. Uzdužna opterećenja ćemo opisati počevši od slobodnog kraja nosača. Za pojedini dio nosača stavit ćemo gornji indeks koji će opisati komponente naprezanja kako bi opisali na kojem je dijelu nosača ta komponenta. Tako broj 1 u gornjem indeksu predstavlja raspodjelu unutrašnje veličine na dijelu duljine L_1 , itd. Na Slici 4.13. su prikazani dijagrami unutrašnjih veličina su prikazani po dijelovima konstrukcije. Ploština poprečnog presjeka cijevi jednaka je $A = \pi(48^2 - 41^2) / 4 = 498,3 \text{ mm}^2$. Normalne komponente naprezanja uslijed uzdužnih sila su po dijelovima:

$$\begin{aligned} (\sigma_x^3)^a &= 0, (\sigma_x^2)^a = -F_2 / A = -1000 / 489,3 = -2,044 \text{ N/mm}^2, \\ (\sigma_x^1)^a &= -F_1 / A = -1500 / 489,3 = -3,066 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Normalne komponente naprezanja uslijed savijanja su po dijelovima:

$$\begin{aligned} \sigma_x^3 &= \frac{F_1(L_3 - x_3)}{I} z_3 - \frac{F_2(L_3 - x_3)}{I} y_3, \quad \sigma_x^2 = \frac{F_1(L_2 - x_2)}{I} z_2 - \frac{F_2 L_3}{I} y_2, \\ \sigma_x^1 &= \frac{F_1 L_2}{I} z_1 - \frac{F_1 L_3}{I} y_1 - \frac{F_2(L_1 - x_1)}{I} y_1. \end{aligned} \quad (4.22)$$



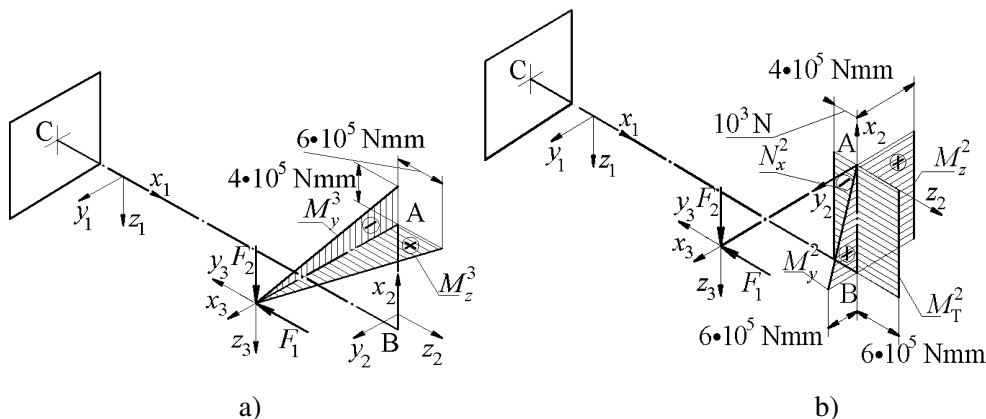
Slika 4.12. Lokalni koordinatni sustavi na konzoli

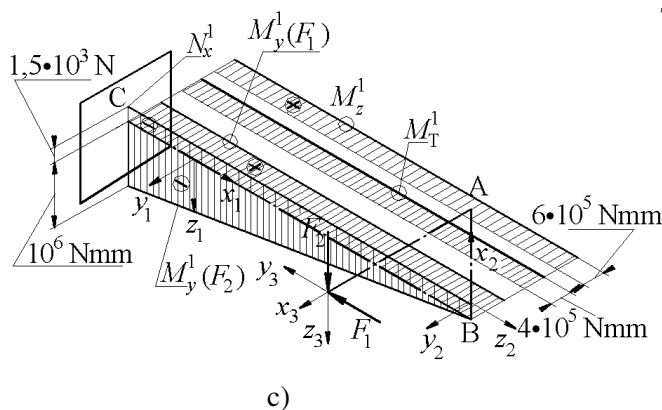
Posmične komponente naprezanja uslijed uvijanja su po dijelovima:

$$\begin{aligned} L_3 : \tau_T &= 0, \\ L_2 : \tau_T &= \frac{F_1 L_3}{I_p} r = \frac{1500 \cdot 400}{4965310} 24 = 2,9 \text{ N/mm}^2, \\ L_1 : \tau_T &= \frac{F_2 L_3}{I_p} r = \frac{1000 \cdot 400}{4965310} 24 = 1,93 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Budući da je nosač stalnog poprečnog presjeka, aksijalni i polarni momenti tromosti presjeka su svugdje isti, kao i aksijalni i polarni momenti otpora. Iznosi tih veličina su:

$$I = \frac{D^4 - d^4}{64} = \frac{48^4 - 41^4}{64} = 2482655 \text{ mm}^4, \quad I_p = \frac{D^4 - d^4}{32} = \frac{48^4 - 41^4}{32} = 4965310 \text{ mm}^4. \quad (4.24)$$





Slika 4.13. Dijagrami unutrašnjih veličina: a) na dijelu duljine L_3 , b) na dijelu duljine L_2 , c) na dijelu duljine L_1

Najveće će vrijednosti normalne komponente naprezanja uslijed savijanja biti ovisne samo o sili i krakovima, pa ćemo ih izračunati za kritična mjesta:

$$\begin{aligned} \text{točka A: } x_3 = 0 &\Rightarrow \sigma_x^3 = \frac{F_1 L_3}{I} z_3 - \frac{F_2 L_3}{I} y_3. \\ \text{točka B: } x_2 = 0 &\Rightarrow \sigma_x^2 = \frac{F_1 L_2}{I} z_2 - \frac{F_2 L_3}{I} y_2. \\ \text{točka C: } x_1 = 0 &\Rightarrow \sigma_x^1 = \frac{F_1 L_2}{I} z_1 - \frac{F_1 L_3}{I} y_1 - \frac{F_2 L_1}{I} y_1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Najveće normalno naprezanje uslijed savijanja odredit ćemo određivanjem pravca na kojem je naprezanje uslijed savijanja jednako nuli prema:

$$\sigma_x^3 = 0 \Rightarrow \frac{F_1 L_3}{I} z_3 - \frac{F_2 L_3}{I} y_3 = 0 \Rightarrow z_3 = \frac{F_2}{F_1} y_3 = \frac{1000}{1500} y_3 = \frac{2}{3} y_3. \quad (4.26)$$

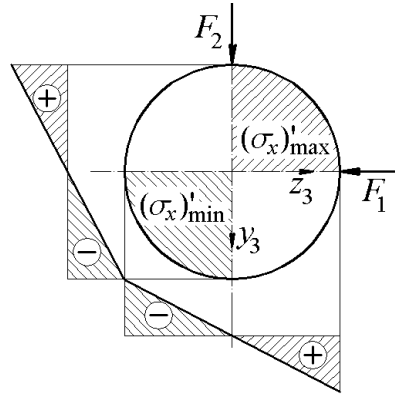
Najveće normalno naprezanje uslijed savijanja odredit ćemo iz jednadžbe (4.25) za svaki dio nosača, postavljanjem uvjeta ekstrema funkcije σ_x^i koja ovisi o koordinatama y i z . Te koordinate nisu međusobno nezavisne nego moramo postaviti uvjet koji opisuje konturu, odnosno vanjski rub presjeka jer na njemu je najveće normalno naprezanje uslijed savijanja. Te su jednadžbe kako slijedi:

$$\begin{aligned} \text{kontura (rub)} &\Rightarrow r^2 = y_3^2 + z_3^2 \Rightarrow y_3 = \pm \sqrt{r^2 - z_3^2}. \\ \sigma_x^3 = \frac{F_1 L_3}{I} z_3 - \frac{F_2 L_3}{I} \sqrt{r^2 - z_3^2} &\left| \frac{d}{dz_3} = 0 \Rightarrow \frac{F_1 L_3}{I} - \frac{F_2 L_3}{I} \frac{1}{2} \frac{-2z_3}{\sqrt{r^2 - z_3^2}} = 0. \right. \\ \frac{z_3}{\sqrt{r^2 - z_3^2}} = -\frac{F_1}{F_2} &\Rightarrow \frac{z_3^2}{r^2 - z_3^2} = \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 \Rightarrow z_3^2 \left(1 + \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right) = r^2 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2. \\ z_3^2 = r^2 \left(\frac{F_1}{F_2} \right)^2 &\frac{F_2^2}{F_2^2 + F_1^2} = r^2 \frac{F_1^2}{F_2^2 + F_1^2} \Rightarrow z_3 = \pm r \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}}. \\ y_3 = \pm \sqrt{r^2 - r^2 \frac{F_1^2}{F_2^2 + F_1^2}} &= \pm r \frac{F_2}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

U zadnjoj jednadžbi u (4.27) smo dobili koordinate s ekstremnim normalnim komponentama naprezanja. Uvrštavanjem tih vrijednosti u izraz za raspodjelu te komponente naprezanja dobivamo izraz za iznos normalne komponente naprezanja kako slijedi:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x^3)_{\max} &= \frac{F_1 L_3}{I} r \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} + \frac{F_2 L_3}{I} r \frac{F_2}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} = \\
 \frac{F_1^2 + F_2^2}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} \frac{L_3}{I} r &= \sqrt{F_2^2 + F_1^2} L_3 \frac{r}{I} = \sqrt{1000^2 + 1500^2} 400 \frac{24}{2482665} = 6,97 \text{ N/mm}^2. \\
 (\sigma_x^3)_{\min} &= -\frac{F_1 L_3}{I} r \frac{F_1}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} - \frac{F_2 L_3}{I} r \frac{F_2}{\sqrt{F_2^2 + F_1^2}} = \\
 -\sqrt{F_2^2 + F_1^2} L_3 \frac{r}{I} &= -\sqrt{1000^2 + 1500^2} 400 \frac{24}{2482665} = -6,97 \text{ N/mm}^2.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Ovdje smo iskoristili poznavanje raspodjele normalne komponente naprezanja po presjeku u kontekstu određivanja predznaka koordinata za određivanje ekstremnih vrijednosti, kako je prikazano na Slici 4.14. U izrazima (4.28) vidimo da postoji dio koji predstavlja rezultantu sile koja djeluje u jednoj ravnini, Oy_3z_3 , odnosno, pomnoženo L_3 što je ispušteno od početka u (4.27), rezultanti vektor momenta savijanja. To ćemo iskoristiti u izračunu normalne komponente naprezanja na drugim mjestima nosača. Isto bismo dobili da su bili zapisani momenti savijanja tih sila.



Slika 4.14. Raspodjela naprezanja po presjeku uslijed savijanja

Analogno izračunu normalne komponente naprezanja uslijed savijanja za treći dio nosača, izračunat ćemo to za drugi i prvi dio nosača kako slijedi:

$$\begin{aligned}
 M_{y_2} &= F_1 L_2 = 1500 \cdot 200 = 300000 \text{ Nmm.} \\
 M_{z_2} &= F_2 L_3 = 1000 \cdot 400 = 400000 \text{ Nmm.} \\
 M_{\text{rez},2} &= \sqrt{M_{y_2}^2 + M_{z_2}^2} = \sqrt{300000^2 + 400000^2} = 500000 \text{ Nmm.} \\
 (\sigma_x^2)'_{\max} &= \frac{M_{\text{rez},2}}{I} r = \frac{500000}{2482655} 24 = 4,83 \text{ N/mm}^2. \\
 (\sigma_x^2)'_{\min} &= -\frac{M_{\text{rez},2}}{I} r = -\frac{500000}{2482655} 24 = -4,83 \text{ N/mm}^2. \\
 M_{y_1} &= F_1 L_2 = 1500 \cdot 200 = 300000 \text{ Nmm.} \\
 M_{z_1} &= F_1 L_3 - F_2 L_1 = 1500 \cdot 400 - 1000 \cdot 1000 = -400000 \text{ Nmm.} \\
 M_{\text{rez},1} &= \sqrt{M_{y_1}^2 + M_{z_1}^2} = \sqrt{300000^2 + 400000^2} = 500000 \text{ Nmm.} \\
 (\sigma_x^1)'_{\max} &= \frac{M_{\text{rez},1}}{I} r = \frac{500000}{2482655} 24 = 4,83 \text{ N/mm}^2. \\
 (\sigma_x^1)'_{\min} &= -\frac{M_{\text{rez},1}}{I} r = -\frac{500000}{2482655} 24 = -4,83 \text{ N/mm}^2.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Dodatno, normalnu komponentu naprezanja uzrokuju uzdužne sile na dijelovima dva i jedan pa je ukupna normalna komponenta naprezanja na tim dijelovima jednaka zbroju:

$$\begin{aligned}\left(\sigma_x^2\right)_{\max} &= \left(\sigma_x^2\right)'_{\max} + \left(\sigma_x^2\right)^a = 4,83 - 2,044 = 2,786 \text{ N/mm}^2. \\ \left(\sigma_x^2\right)_{\min} &= \left(\sigma_x^2\right)'_{\min} + \left(\sigma_x^2\right)^a = -4,83 - 2,044 = -6,874 \text{ N/mm}^2. \\ \left(\sigma_x^1\right)_{\max} &= \left(\sigma_x^1\right)'_{\max} + \left(\sigma_x^1\right)^a = 4,83 - 3,066 = 1,764 \text{ N/mm}^2. \\ \left(\sigma_x^1\right)_{\min} &= \left(\sigma_x^1\right)'_{\min} + \left(\sigma_x^1\right)^a = -4,83 - 3,066 = -7,926 \text{ N/mm}^2.\end{aligned}\tag{4.31}$$

5. TEORIJE ČVRSTOĆE

U prethodnom poglavlju su prikazani primjeri opterećenja štapova u kojima je višeosno stanje naprezanja, tj. istovremeno u materijalu postoje normalne i posmične komponente naprezanja. U tim slučajevima ne možemo usporediti dopuštene vrijednosti za rastezanje ili sabijanje ili smicanje dobivene u ispitivanjima pri jednoosnom stanju naprezanja s odgovarajućim komponentama naprezanja u materijalu. Praksa i ispitivanja su pokazala da takva višeosna stanja naprezanja moramo „preračunati“ na jednoosno stanje naprezanja kako bi to dobiveno naprezanje, koje možemo zvati i ekvivalentno naprezanje, usporedili s dopuštenim za jednoosno stanje naprezanja, dobiveno ispitivanjem materijala. Iz tog razloga su uvedene teorije čvrstoće koje pokušavaju predvidjeti pojavu plastičnog tečenja (trajne deformacije) ili loma pri općem stanju naprezanja na osnovi poznavanja ponašanja materijala pri jednoosnom stanju naprezanja. Nijedna teorija čvrstoće nije sveobuhvatna, tj. nije primjenjiva na sve vrste materijala. Neke teorije su bolje za duktilne materijale, neke su bolje za krhke materijale [1].

5.1. Energija deformiranja

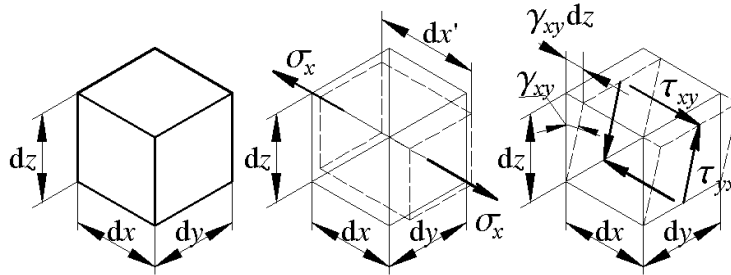
U teorijama čvrstoće se spominju pojmovi energija deformiranja, dilatacijska i distorzijska energija. Energiju deformiranja odredit ćemo promatranjem elementarnog volumena prema Slici 5.1. Naprezanje σ_x na ploštini $dydz$ stvara rad na pomaku $\varepsilon_x dx$, počevši od nenapregnutog stanja, iznosa:

$$dW(\sigma_x) = \sigma_x dydz \varepsilon_x dx / 2 = \sigma_x \varepsilon_x dx dydz / 2 = \sigma_x \varepsilon_x dV / 2, \quad (5.1)$$

naprezanje τ_{xy} na ploštini $dx dz$ stvara rad na pomaku $\gamma_{xy} dz$, počevši od nenapregnutog stanja, iznosa:

$$dW(\tau_{xy}) = \tau_{xy} dx dy \gamma_{xy} dz / 2 = \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz / 2 = \tau_{xy} \gamma_{xy} dV / 2, \quad (5.2)$$

i tako analogno za ostale komponente naprezanja.



Slika 5.1. Deformiranje elementarnog volumena materijala [1]

Faktor $1/2$ u izrazima za rad pojedinih komponenta naprezanja je zbog toga što naprezanja počinju od vrijednosti 0 sve do konačne vrijednosti, pa je stoga rad jednak polovini konačne vrijednosti naprezanja, kao srednje vrijednosti kroz proces. Ukupni rad svih komponenta naprezanja na elementarnom volumenu jednak je energiji deformiranja U i iznosi:

$$dW = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV / 2 = dU. \quad (5.3)$$

Ako energiju deformiranja podijelimo s elementarnim volumenom dobivamo gustoću energije deformiranja:

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) / 2. \quad (5.4)$$

Ako komponente deformacije prikažemo pomoću Hookeovog zakona preko komponenta naprezanja, dobit ćemo:

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (5.5)$$

Gustoća energije deformiranja ne ovisi o izboru koordinatnog sustava, pa ćemo odabrati glavne osi naprezanja kako bi pojednostavnili izraz (5.5):

$$U_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \quad (5.6)$$

5.2. Distorzijska i dilatacijska energija

Deformiranje okoline svake točke može se predstaviti kao promjena obujma – dilatacija i promjena oblika – distorzija. Energiju deformiranja za promjenu obujma zovemo dilatacijska energija, a energiju promjene oblika distorzijska energija [1, 7]. Svaki se tenzor naprezanja može rastaviti na sferni i devijatorski dio. Sferni dio izaziva dilataciju a devijatorski izaziva distorziju. Matrica sfernog dijela tenzora naprezanja $[\sigma_{ij}^0]$ je:

$$[\sigma_{ij}^0] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Iznos komponenata sfernog naprezanja je $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$. Matricu devijatorskog dijela tenzora naprezanja $[s_{ij}^0]$ dobijemo ako od tenzora naprezanja oduzmemo sferni dio tenzora naprezanja:

$$[s_{ij}^0] = [\sigma_{ij}] - [\sigma_{ij}^0]. \quad (5.8)$$

Gustoću distorzijske energije deformiranja dobijemo ako u izraz za gustoću deformiranja (5.6) uvrstimo devijatorske komponente naprezanja pa slijedi:

$$U_{od} = \frac{1}{2E}[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (5.9)$$

Izraz (5.9) može se pojednostavniti na:

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (5.10)$$

5.3. Teorija najvećeg normalnog naprezanja

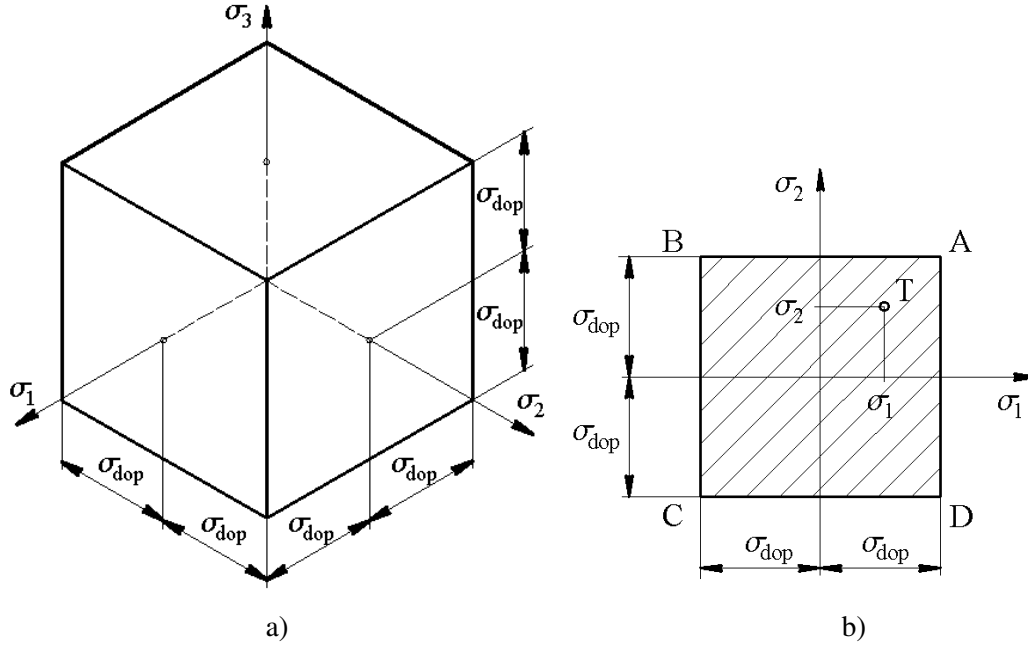
Prema ovoj teoriji opasnost od loma nastaje kada normalno naprezanje, najveće po apsolutnoj vrijednosti, dostigne kritičnu vrijednost. Najveće od tri glavna naprezanja je mjerodavno za provjeru opasnosti od loma. Uvjet čvrstoće je:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_{max} < \sigma_{dop}, \quad (5.11)$$

gdje je σ_{ekv} ekvivalentno naprezanje, $\sigma_{max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_3|)$ najveće po apsolutnoj vrijednosti glavno naprezanje i σ_{dop} dopušteno naprezanje dobiveno ispitivanjem ispitnog uzorka. Za krhke materijale dopušteno naprezanje je određeno $\sigma_{dop} = \sigma_M / S$, gdje je σ_M statička čvrstoća pri rastezanju, dok je kod duktilnih materijala dopušteno naprezanje $\sigma_{dop} = \sigma_e / S$, gdje je σ_e granica elastičnosti, odnosno tečenja, dok je S faktor sigurnosti. Ako materijal ima različitu čvrstoću pri rastezanju i sabijanju, uvjet čvrstoće je:

$$\sigma_1 < \sigma_{vdop}, |\sigma_3| < \sigma_{tdop}, \sigma_3 < 0. \quad (5.12)$$

gdje je $\sigma_{v\text{dop}}$ dopušteno “vlačno” naprezanje, a $\sigma_{t\text{dop}}$ dopušteno tlačno naprezanje. Oba ova uvjeta moraju biti istovremeno ispunjena. U slučaju dvoosnog stanja naprezanja uvjeti čvrstoće prikazuju se pomoću *krivulja čvrstoće* u koordinatnom sustavu $O\sigma_1\sigma_2$, kako je prikazano na Slici 5.2. a). U svakoj točki konstrukcije postoji neko stanje naprezanja koje u ovom koordinatnom sustavu prikazujemo točkom T, s koordinatama $T(\sigma_1, \sigma_2)$. Ako se točka T nalazi unutar plohe kvadra prema Slici 5.2. a) ili kvadrata ABCD prema Slici 5.2. b), nema opasnosti od plastičnog tečenja, ili loma, tj. ispunjen je uvjet čvrstoće. Ako se točka T nalazi na rubu kvadrata ABCD, uvjet čvrstoće nije ispunjen. U slučaju troosnog stanja naprezanja uvjet čvrstoće je prikazan *plohom čvrstoće*, kako je prikazano na Slici 5.2. a).



Slika 5.2. Ploha tečenja [1]: a) krivulja tečenja, b) teorija najvećeg normalnog naprezanja

Prema Slici 5.2. a) ploha čvrstoće je u teoriji najvećeg normalnog naprezanja ploha koja omeđuje kocku stranica $2\sigma_{\text{dop}}$. Središte je kocke u ishodištu koordinatnog sustava. Teorija najvećeg normalnog naprezanja je jedna od ranih teorija. Pokazalo se da je jedino dobra za krhke materijale u području rastezanja.

5.4. Teorija najveće duljinske deformacije

Prema ovoj teoriji lom može nastupiti ako najveća normalna deformacija dostigne kritičnu vrijednost. Kriterij čvrstoće je:

$$|\varepsilon|_{\max} < \varepsilon_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{E}, \quad (5.13)$$

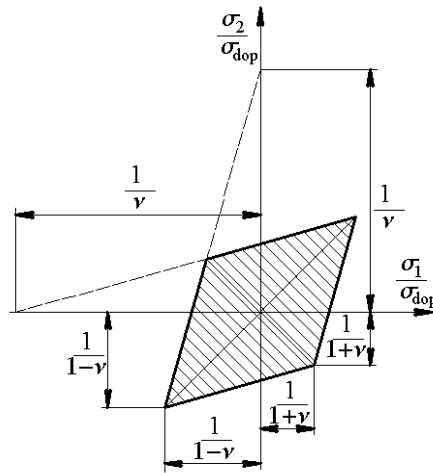
gdje je $|\varepsilon|_{\max}$ najveća apsolutna vrijednost duljinske deformacije. U slučaju da je $|\sigma_1| > |\sigma_3|$ bit će:

$$|\varepsilon_{\max}| = \frac{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E} \leq \frac{\sigma_{\text{dop}}}{E} \Rightarrow \sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{\text{dop}}. \quad (5.14)$$

U slučaju da je $|\sigma_3| > |\sigma_1|$ bit će:

$$\sigma_{\text{ekv}} = |\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)| \leq \sigma_{\text{dop}}. \quad (5.15)$$

Krivulja čvrstoće prema ovoj teoriji je prikazana na Slici 5.3. I ova teorija se nije pokazala dobrom, pa se danas rijetko koristi.



Slika 5.3. Krivulja tečenja teorije najveće duljinske deformacije

5.5. Teorija najvećeg posmičnog naprezanja

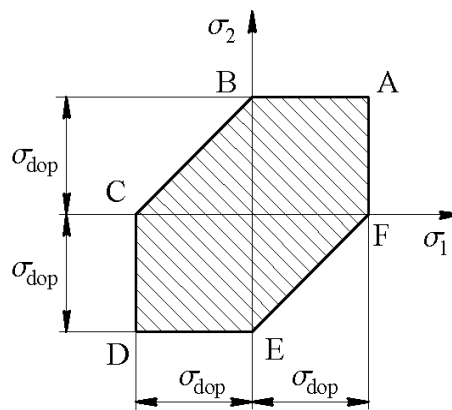
Prema ovoj teoriji opasnost od plastičnog tečenja ili loma nastaje kada najveće posmično naprezanje dostigne kritičnu vrijednost $\tau_{\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}} / 2$. Za opće stanje naprezanja $\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$, pa je uvjet čvrstoće:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \Rightarrow \sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{\text{dop}}, \text{ uz } |\sigma_1| > |\sigma_2| > |\sigma_3|. \quad (5.16)$$

Ovisno o predznacima glavnih naprezanja, a ako je jedno glavno naprezanje je jednako nuli, razlikujemo tri slučaja:

- oba glavna naprezanja su veća od nule, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$ ekvivalentno naprezanje je $\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1$,
- oba glavna naprezanja su manja od nule, $\sigma_2, \sigma_3 < 0$, $\sigma_1 = 0$ ekvivalentno naprezanje je $\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_3$,
- glavna naprezanja su suprotnog predznaka, $\sigma_1 > 0, \sigma_3 < 0$, $\sigma_2 = 0$ ekvivalentno naprezanje je $\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_1 - \sigma_3$.

Krivulja čvrstoće prikazana je na Slici 5.4.



Slika 5.4. Krivulja tečenja teorije najvećeg posmičnog naprezanja

5.6. Teorija najveće distorzijske energije

Prema ovoj teoriji opasnost od loma nastaje kada gustoća distorzijske energije dostigne kritičnu vrijednost. Uvjet čvrstoće je:

$$U_{od} \leq U_{od \text{ dop}}. \quad (5.17)$$

Gustoća distorzijske energije je prema (5.10):

$$U_{od} = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (5.18)$$

Ako pri jednoosnom stanju naprezanja naprežanje dostigne vrijednost σ_{dop} , dopuštena distorzijska energija iznosi:

$$U_{od \text{ dop}} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{dop}^2. \quad (5.19)$$

Izraz (5.19) nastaje kada u izraz (5.18) uvrstimo $\sigma_1 = \sigma_{dop}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Nakon uvođenja izraza (5.18) i (5.19) u (5.17) dobivamo:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] / 2} \leq \sigma_{dop}. \quad (5.20)$$

Ova teorija se naziva HMM teorija, prema njenim autorima M. T. Huber, R. von Mises, H. Hencky. U slučaju dvoosnog stanja naprezanja izraz (5.20) prelazi u:

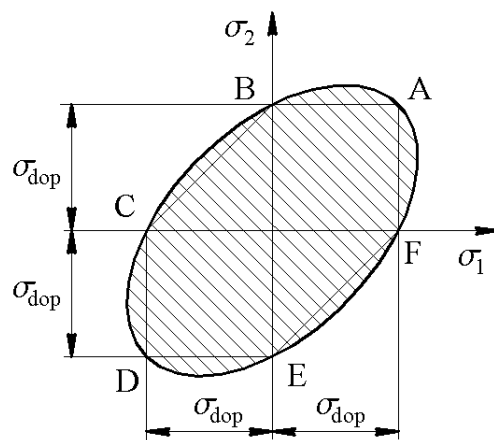
$$\sigma_{ekv} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \leq \sigma_{dop}. \quad (5.21)$$

Taj izraz možemo napisati kao:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{dop}} \right)^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{dop}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{dop}} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{dop}} \right)^2 \leq 1. \quad (5.22)$$

što je jednačba elipse. To slijedi iz činjenice da izraz (5.20) predstavlja jednačbu valjka polumjera $R = \sqrt{2/3} \sigma_{dop}$ kojemu je os pravac $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, što predstavlja hidrostatski pravac. Hidrostatski pravac predstavlja stanje hidrostatskog naprezanja, tj., sve tri normalne komponente naprezanja su jednake i negativne. Presjecište tog valjka s koordinatnom ravninom $O\sigma_1\sigma_2$ daje elipsu (5.22), odnosno krivulju čvrstoće. Krivulja čvrstoće prema HMM teoriji prikazana je na Slici 5.5.

Jedna teorija nije pogodna za bilo koji materijal, i bilo koju kombinaciju komponenata naprezanja (stanje naprezanja), pa je za duktilne (plastične) materijale najtočnija HMM teorija, dok je bliska i teorija najvećeg posmičnog naprezanja, dok je za krhke materijale u području rastezanja bolja teorija najvećeg normalnog naprezanja [1].



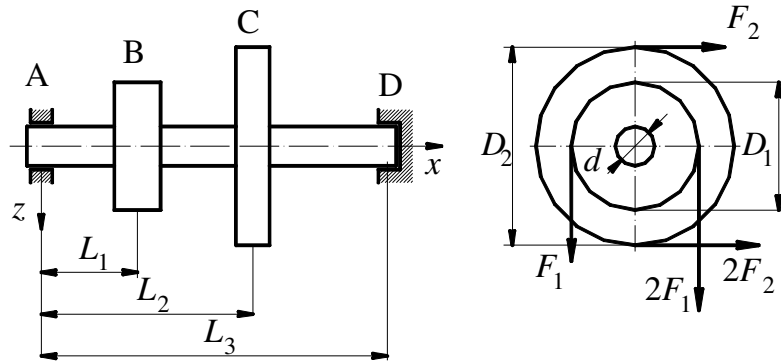
Slika 5.5. Krivulja tečenja teorije najveće distorzijske energije

Primjer 5.1. Dimenzioniranje složeno opterećenog vratila. Savijanje i uvijanje.

Na Slici 5.6. prikazano je vratilo promjera d s remenicama. Remenicom B, promjera D_1 , dovodi se snaga P . Zanemarujući gubitke, remenicom C, promjera D_2 , ta se snaga odvodi. Odrediti promjer vratila prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja i prema teoriji najveće gustoće distorzijske energije (HMH). Zadano:

$$P = 5500 \text{ W}, n = 960 \text{ min}^{-1}, D_1 = 240 \text{ mm}, D_2 = 360 \text{ mm}, L_1 = 200 \text{ mm}, L_2 = 300 \text{ mm}, L_3 = 500 \text{ mm},$$

$$\sigma_{\text{dop}} = 220 \text{ N/mm}^2.$$



Slika 5.6. Vratilo opterećeno na savijanje i uvijanje

Vratilo prenosi snagu $P = T\omega$ na dijelu od, pojednostavljeno promatrano, sredine remenice B do sredine remenice C. Kutna brzina jednaka je $\omega = 2\pi n / 60 = 2\pi 960 / 60 = 100,53 \text{ s}^{-1}$. Moment uvijanja T je veličine:

$$P = T\omega \rightarrow T = \frac{P}{\omega} = \frac{5500}{100,53} = 54,71 \text{ Nm.} \quad (5.23)$$

Najveća vrijednost posmične komponente naprezanja uslijed uvijanja vratila jednaka je:

$$\tau_T = \frac{T}{W_p} = \frac{T}{\pi d^3 / 16} = \frac{54710}{\pi d^3 / 16} = \frac{278635,74}{d^3} \text{ N/mm}^2. \quad (5.24)$$

Moment uvijanja na remenicama je ostvaren obodnom silom kao razlikom sila u krakovima remena. Za remenicu B obodna sila $(F_o)_1$ i sile u krakovima remena su:

$$(F_o)_1 = \frac{T}{r_1} = \frac{54710}{240/2} = 455,92 \text{ N.} \quad (5.25)$$

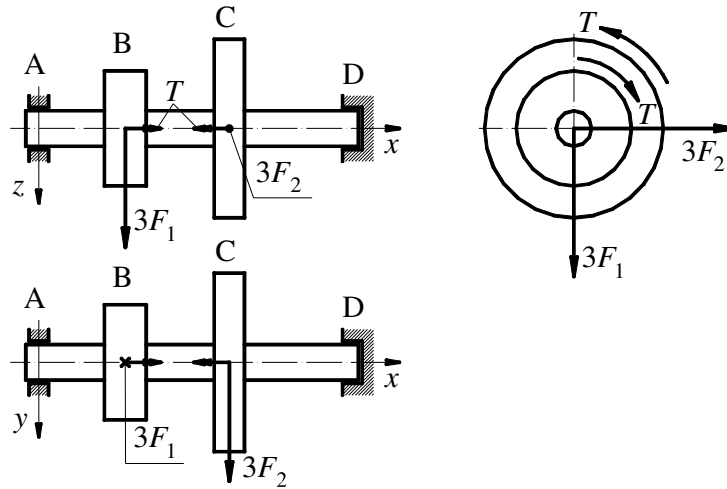
$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 2F_1 r_1 - F_1 r_1 = (F_o)_1 r_1 \rightarrow F_1 = (F_o)_1 = 455,92 \text{ N.}$$

Za remenicu C obodna sila $(F_o)_2$ i sile u krakovima remena su:

$$(F_o)_2 = \frac{T}{r_2} = \frac{54710}{360/2} = 303,94 \text{ N.} \quad (5.26)$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow 2F_2 r_2 - F_2 r_2 = (F_o)_2 r_2 \rightarrow F_2 = (F_o)_2 = 303,94 \text{ N.}$$

Na Slici 5.7. prikazane su reducirane sile na središnjicu vratila i pripadni momenti.

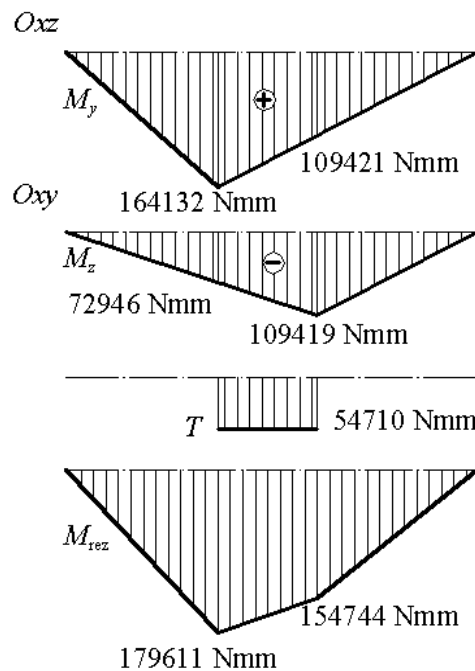


Slika 5.7. Opterećenja na vratilu

Sile reducirane na središnjicu vratila djeluju u dvije koordinatne ravnine, pa ćemo iduće izračunati momente savijanja na mjestima koncentriranih sila. Momenti savijanja su prikazani na Slici 5.8. Za Oxz i Oxy slijedi:

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \rightarrow F_A^z - 3F_1 + F_D^z = 0. \\ \sum M_y &= 0 \rightarrow 3F_1L_1 + F_D^zL_3 = 0. \\ F_D^z &= 3F_1L_1 / L_3 = 3 \cdot 455,92(200/500) = 547,1 \text{ N.} \\ F_A^z &= 3F_1 - F_D^z = 3 \cdot 455,92 - 547,1 = 820,66 \text{ N.}\end{aligned}\tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \rightarrow F_A^y - 3F_2 + F_D^y = 0. \\ \sum M_z &= 0 \rightarrow 3F_2L_2 + F_D^yL_3 = 0. \\ F_D^y &= 3F_2L_2 / L_3 = 3 \cdot 303,94(300/500) = 547,1 \text{ N.} \\ F_A^y &= 3F_2 - F_D^y = 3 \cdot 303,94 - 547,1 = 364,73 \text{ N.}\end{aligned}\tag{5.28}$$



Slika 5.8. Momenti savijanja i uvijanja za vratilo

Normalnu komponentu naprezanja uslijed savijanja ćemo izračunati za slučaj momenta savijanja u dvije ravnine kao u Primjeru 4.2. gdje smo izračunali resultantni moment savijanja, pa ćemo to učiniti i ovdje, na mjestima ekstremnih momenta savijanja u jednoj i drugoj ravnini:

$$\begin{aligned} M_{B,rez} &= \sqrt{M_{yB}^2 + M_{zB}^2} = \sqrt{164132^2 + 72946^2} = 179611 \text{ Nmm.} \\ M_{C,rez} &= \sqrt{M_{yC}^2 + M_{zC}^2} = \sqrt{109419^2 + 109421^2} = 154744 \text{ Nmm.} \end{aligned} \quad (5.29)$$

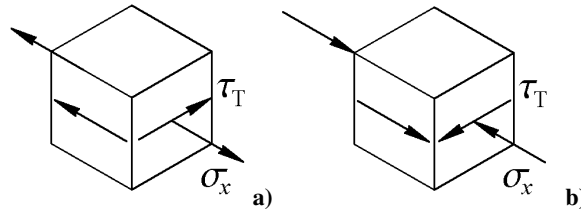
Za jednoliki presjek vratila, i jednaki moment uvijanja na području od B do C, kritičan presjek je presjek B. Normalna komponenta naprezanja jednaka je:

$$\sigma_{xB,max} = \frac{M_{B,rez}}{W} = \frac{M_{B,rez}}{\pi d^3 / 32}. \quad (5.30)$$

Posmična komponenta naprezanja na istom mjestu jednaka je:

$$\tau_{TB,max} = \frac{M_T}{W_p} = \frac{M_T}{\pi d^3 / 16}. \quad (5.31)$$

Budući da ne možemo izračunati iznos komponenata naprezanja na kritičnom mjestu, odredit ćemo izraz prema kojem možemo izračunati ekvivalentni moment umjesto ekvivalentnog naprezanja. Budući da postoje dvije komponente naprezanja, ovo je dvoosno stanje naprezanja, a komponente naprezanja su prikazane na Slici 5.9. Na Slici 5.9. a) je prikazano stanje naprezanja za točku presjeka s maksimalnim normalnim naprežanjem, a na Slici 5.9. b) s minimalnim.



Slika 5.9. Komponente naprezanja u materijalu vratila: a) pozitivno normalno naprežanje, b) negativno normalno naprežanje

Pretpostavljeni materijal ima jednaku čvrstoću pri rastezanju i sabijanju. Čitatelj se može uvjeriti da je ekvivalentno naprežanje jednakog iznosa ako se računa pomoću komponenata naprezanja prema Slici 5.9. a) ili 5.9. b), stoga provjera čvrstoća ne ovisi o odabranom predznaku normalnog naprežanja. Glavna naprežanja za dvoosno stanje naprežanja su jednaka:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right). \\ \frac{1}{2} \left(\frac{M_{B,rez}}{W} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{B,rez}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{2W}\right)^2} \right) &= \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} \pm \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right). \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right); \sigma_2 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Prema teoriji HMM ekvivalentno naprežanje jednako je prema (5.21):

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{1}{2W} (M_{B,rez} + \sqrt{A}); \sigma_2 = \frac{1}{2W} (M_{B,rez} - \sqrt{A}) \Big| A = (M_{B,rez})^2 + (M_T)^2 \Big| \\
 \sigma_{ekv} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{2W} \sqrt{(M_{B,rez} + \sqrt{A})^2 + (M_{B,rez} - \sqrt{A})^2 - (M_{B,rez} + \sqrt{A})(M_{B,rez} - \sqrt{A})} = \\
 &= \frac{1}{2W} \left[\sqrt{(M_{B,rez} + \sqrt{A})^2 + (M_{B,rez} - \sqrt{A})^2 - (M_{B,rez} + \sqrt{A})(M_{B,rez} - \sqrt{A})} \right] = \\
 &= \frac{1}{2W} \left[\sqrt{M_{B,rez}^2 + 3A} \right] = \frac{1}{2W} \left[\sqrt{M_{B,rez}^2 + 3(M_{B,rez})^2 + 3(M_T)^2} \right] = \frac{1}{W} \sqrt{M_{B,rez}^2 + 0,75M_T^2} \\
 M_{ekv} &= \sqrt{M_{B,rez}^2 + 0,75M_T^2} = \sqrt{179611^2 + 0,75 \cdot 54710^2} = 185755 \text{ Nmm}.
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

Sada možemo odrediti promjer iz uvjeta čvrstoće $\sigma_{ekv} = M_{ekv} / W < \sigma_{dop}$, pa slijedi:

$$\frac{\pi d^3}{32} > \frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d > \sqrt[3]{\frac{185755}{220} \frac{32}{\pi}} = 20,49 \text{ mm}. \tag{5.34}$$

Obično su strojni elementi izrađeni prema sustavu standardnih brojeva (opisano u [11, 16]) pa sve vrijednosti treba zaokružiti na prvu veću standardnu ili „okruglu“ brojku, u ovom slučaju 25. Prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja ekvivalentno naprezanje jednako je prema (5.16):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ekv} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right) \\
 \sigma_1 &= \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right); \sigma_2 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Ovdje vrijedi da je σ_3 algebarski najmanje glavno naprezanje pa treba provjeriti je li izraz u zagradi za σ_2 manji od nule ili veći, jer u slučaju da je manji od nule to glavno naprezanje u slučaju računanja ekvivalentnog naprezanja po teoriji najvećeg posmičnog naprezanja nije σ_2 nego σ_3 jer je jedno glavno naprezanje 0, a vrijedi dogovor da je $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Nadalje provjeravano gornju dvojbu:

$$\begin{aligned}
 M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} &= 179611 - \sqrt{179611^2 + 54710^2} = \\
 &= 179611 - 187758 = -8147 \text{ Nmm}.
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dakle, izraz (5.35) nije formalno ispravan, pa ćemo to ispraviti na način:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right), \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right). \tag{5.37}$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja je:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ekv} &= \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right) - \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right) = \\
 &= \frac{1}{W} \sqrt{M_{B,rez}^2 + M_T^2} \Rightarrow M_{ekv} = \sqrt{M_{B,rez}^2 + M_T^2} = \sqrt{179611^2 + 54710^2} = 187758 \text{ Nmm}.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Sada možemo odrediti promjer iz uvjeta čvrstoće $\sigma_{ekv} = M_{ekv} / W < \sigma_{dop}$ pa slijedi:

$$\frac{\pi d^3}{32} > \frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d > \sqrt[3]{\frac{187758}{220} \frac{32}{\pi}} = 20,56 \text{ mm}. \tag{5.39}$$

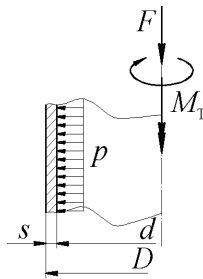
Prema standardnim brojevima prvi standardni broj veći od 20 je 25 pa ćemo usvojiti standardni promjer od $d = 25 \text{ mm}$.

Primjer 5.2. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, uvijanjem i uzdužnim opterećenjem.

Na Slici 5.10. prikazana je tankostjena cijev promjera D/d , debljine stijenke s opterećena unutrašnjim tlakom, uzdužnom silom i momentom uvijanja. Odrediti vanjski i unutrašnji promjer uz zadanu debljinu stijenke prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja. Zadano:

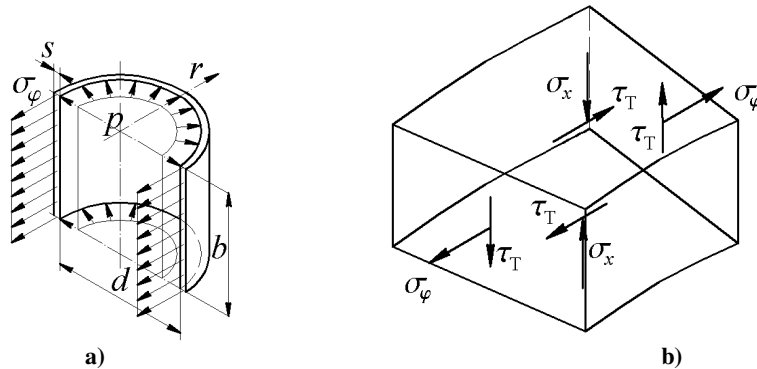
$$F = 100 \text{ kN}, M_T = 40 \text{ kNm}, p = 100 \text{ bar}, s = 12 \text{ mm}, \sigma_{\text{dop}} = 150 \text{ N/mm}^2.$$

U stijenci cijevi se javljaju posmična komponenta naprezanja kao posljedica momenta uvijanja, normalna komponenta naprezanja u cirkularnom smjeru, prikazano na Slici 5.11, kao posljedica unutrašnjeg tlaka i normalna komponenta naprezanja na uzdužnom pravcu kao posljedica uzdužne tlačne sile. Prema membranskoj teoriji [3, 16] raspodjela cirkularnog naprezanja uslijed unutrašnjeg tlaka je pretpostavljena konstantna po debljini, a radijalnu komponentu naprezanja zanemarujemo jer je za tanke ljuske, gdje je uvjet za tanku ljusku omjer debljine stijenke i srednjeg radijusa zakrivljenosti $s/R < 1/20$, tlak dva reda veličine manji od cirkularnog naprezanja. Za cilindričnu cijev možemo cirkularno naprezanje izračunati promatrajući ravnotežu zamišljeno presječene cijevi ravninom koja sadrži simetralu cijevi, kako je prikazano na Slici 5.11. a).



Slika 5.10. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, tlačnom silom i momentom uvijanja

Na vanjskoj stijenci cijevi radijalna komponenta naprezanja iščezava, tj. ne djeluje pretlak. Ovdje nećemo razmatrati raspodjelu radijale komponente naprezanja po radijusu (kroz stijenku). Razmotrit ćemo naprezanja na unutrašnjoj i vanjskoj stijenci.



Slika 5.11. Naprezanje u stijenci cijevi [3]: a) izračunavanje cirkularnog naprezanja, b) stanje naprezanja u stijenci cijevi

Na unutrašnjoj stijenci jedno glavno naprezanje je jednako 0. Za određivanje ostala dva glavna naprezanja moramo izračunati normalnu komponentu naprezanja u cirkularnom smjeru. Budući da će cijev biti tanke stijenke u odnosu na unutrašnji radijus, možemo pojednostavniti izračun, odnosno raspodjelu, cirkularne komponente naprezanja po radijusu, odnosno kroz stijenku, pa ćemo reći da je konstantna (točna raspodjela je po zakonu hiperbole, iako je za npr. $r_2/r_1 = 1,1$ razlika σ_ϕ otprilike 10% na vanjskoj prema unutrašnjoj stijenci. Prema Slici 5.11. a) cirkularno naprezanja izračunavamo prema:

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow p d b - 2 s \sigma_\phi b = 0 \Rightarrow \sigma_\phi \approx \frac{p d}{2 s} = \frac{10 \cdot d}{2 \cdot 12} \text{ N/mm}^2, \quad (5.40)$$

gdje je F_r sila projicirana na radijalni pravac. Posmična komponenta naprezanja uslijed momenta uvijanja je jednaka:

$$\tau_T = \frac{M_T}{\pi(D^4 - (D - 2s)^4) / 32} \frac{D}{2}. \quad (5.41)$$

Normalna komponenta naprezanja uslijed uzdužne sile je:

$$\sigma_x = -\frac{4F}{\pi(D^2 - (D - 2s)^2)}. \quad (5.42)$$

Dva glavna naprezanja su:

$$(\sigma_{1,2})' = \frac{\sigma_x + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_T^2}. \quad (5.43)$$

Budući da komponente naprezanja ovise nelinearno o promjeru, nećemo pokušavati riješiti izravno jednadžbe uvjeta čvrstoće, nego ćemo pokušati izračunati principom pokušaj – pogreška. Detaljnije o načinu rješavanja ovakvih jednadžbi numerički čitatelj može naći u [8, 13, 16, 18]. Korake približnog izračuna ćemo provesti na način da odaberemo promjer, izračunamo komponente naprezanja i ekvivalentno naprezanje:

$$\sigma_{ekv} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (5.44)$$

Čitatelj se može uvjeriti da je ekvivalentno naprezanje veće za vanjski radijus od vrijednosti za unutrašnji radijus, te ćemo stoga kao mjerodavno uzeti ekvivalentno naprezanje na vanjskoj stijenci. Nakon izračunavanja ekvivalentnog naprezanja utvrdimo grešku, odnosno, zadovoljavanje kriterija čvrstoće. Za idući korak mijenjamo promjer u cilju smanjenja greške po principu ako je ekvivalentno naprezanje veće od dopuštenog, povećavamo promjer, a ako je manje smanjujemo. Te korake provodimo dok ekvivalentno naprezanje ne dođe do unutar 5% od vrijednosti dopuštenog naprezanja, naravno, ispod vrijednosti dopuštenog naprezanja. Za odabrane vanjske promjere izračunate su vrijednosti ekvivalentnog naprezanja kako slijedi:

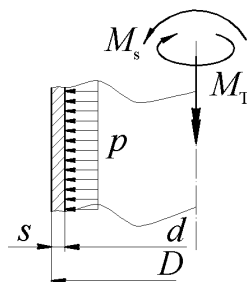
$$\begin{aligned} D = 200 \text{ mm} &\Rightarrow \sigma_{ekv}(D/2) = 154,4 \text{ N/mm}^2. \\ D = 220 \text{ mm} &\Rightarrow \sigma_{ekv}(D/2) = 140 \text{ N/mm}^2. \\ D = 240 \text{ mm} &\Rightarrow \sigma_{ekv}(D/2) = 132,95 \text{ N/mm}^2. \\ D = 210 \text{ mm} &\Rightarrow \sigma_{ekv}(D/2) = 146,1 \text{ N/mm}^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Najbliže granici dopuštenog naprezanja dobivamo za vrijednost vanjskog promjera $D = 210 \text{ mm}$, a povećanjem vanjskog promjera smanjuje se ekvivalentno naprezanje. Možemo ustvrditi da je $D = 210 \text{ mm}$ najmanji vanjski promjer koji zadovoljava uvjet čvrstoće unutar 5% od dopuštenog naprezanja prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja.

Primjer 5.3. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, uvijanjem i savijanjem.

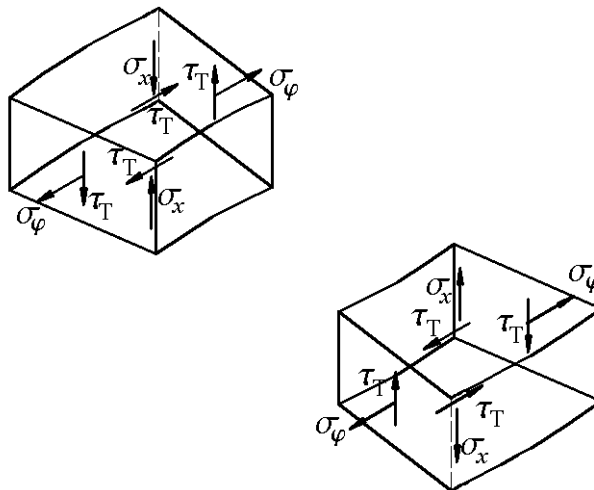
Na Slici 5.12. prikazana je tankostjena cijev promjera D/d , debljine stijenke s opterećena unutrašnjim tlakom, momentom savijanja i momentom uvijanja. Odrediti vanjski i unutrašnji promjer uz zadanu debljinu stijenke prema teorijama najvećeg posmičnog naprezanja i najveće gustoće distorzijske energije (HMH).

Zadano: $M_s = 20 \text{ kNm}$, $M_T = 30 \text{ kNm}$, $p = 100 \text{ bar}$, $s = 12 \text{ mm}$, $\sigma_{dop} = 150 \text{ N/mm}^2$.



Slika 5.12. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, momentima savijanja i uvijanja

U stijenci cijevi se javljaju posmična komponenta naprezanja kao posljedica momenta uvijanja, normalna komponenta naprezanja u cirkularnom i radijalnom smjeru, prikazano na Slici 5.13., kao posljedica unutrašnjeg tlaka i normalna komponenta naprezanja na uzdužnom pravcu kao posljedica momenta savijanja. Na Slici 5.13. prikazana su dva isječka cijevi radi pojašnjenja (prikaza) normalne komponente naprezanja uslijed momenta savijanja, jer je na jednoj strani cijevi na pravcu okomitom na središnjicu cijevi i pravac vektora momenta savijanja normalna komponenta naprezanja pozitivna, dok je na suprotnoj strani cijevi (gledano “kroz” promjer cijevi na suprotnoj strani) ta komponenta naprezanja negativna. Na unutrašnjoj stijenci cijevi postoje dvije normalne komponente naprezanja, σ_φ, σ_x i dvije posmične komponente, τ_T , i to dvije različite kombinacije na dijametralno suprotnim mjestima, dok su na vanjskoj stijenci dvije normalne komponente naprezanja σ_φ, σ_x i posmične komponente, τ_T , i to opet dvije kombinacije predznaka.



Slika 5.13. Stanje naprezanja na dijametralno suprotnim mjestima na cijevi

Provjerit ćemo sve četiri kombinacije komponenata naprezanja, odnosno, za svaku kombinaciju ekvivalentno naprezanje da bismo odredili kritičnu veličinu ekvivalentnog naprezanja. Normalna komponenta naprezanja σ_φ se izračunava kao u prethodnom primjeru, prema (5.40):

$$\sigma_\varphi \approx \frac{pd}{2s} = \frac{10 \cdot d}{2 \cdot 12}. \quad (5.46)$$

Normalna komponenta naprezanja uslijed savijanja izračunava se ovisno o radijusu prema:

$$\sigma_x = \frac{M_s}{\pi(D^4 - (D - 2s)^4) / 64} r. \quad (5.47)$$

Posmična komponenta naprezanja uslijed uvijanja izračunava se ovisno o radijusu prema:

$$\tau_T = \frac{M_T}{\pi(D^4 - (D - 2s)^4) / 32} r. \quad (5.48)$$

Budući da iznosi komponenata naprezanja ovise o promjeru cijevi, moramo odabrati neki promjer da bismo pojednostavnili određivanje najveće vrijednost ekvivalentnog naprezanja, odnosno određivanje kritičnog mjesto na cijevi. Odabrat ćemo vanjski promjer 10 puta veći od debljine stijenke cijevi, tj. $D = 10s = 120 \text{ mm}$. Slijedi da su komponente naprezanja na unutrašnjoj i vanjskoj stijenci:

$$\sigma_x = \frac{20 \cdot 10^6}{\pi(120^4 - 96^4)/64} r = 3,328 r \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma_x(r=48) = 159,74 \text{ N/mm}^2, \sigma_x(r=60) = 199,68 \text{ N/mm}^2.$$

$$\tau_T = \frac{30 \cdot 10^6}{\pi(120^4 - 96^4)/32} r = 2,496 r \text{ N/mm}^2. \quad (5.49)$$

$$\tau_T(r=48) = 119,81 \text{ N/mm}^2, \tau_T(r=60) = 149,76 \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma_\varphi = \frac{10 \cdot 96}{2 \cdot 12} = 40 \text{ N/mm}^2.$$

Ekvivalentno naprezanje ćemo izračunati u četiri točke, A, B, C i D, kako je prikazano na Slici 5.14. Komponente naprezanja u točki A su:

$$\sigma_x^A(r=60) = -199,68 \text{ N/mm}^2, \tau_T(r=60) = 149,76 \text{ N/mm}^2, \sigma_\varphi = 40 \text{ N/mm}^2. \quad (5.50)$$

Ove su komponente u jednoj ravnini pa ćemo glavna naprezanja izračunati prema:

$$(\sigma_{1,2})' = \frac{\sigma_x + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{-199,68 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-199,68 - 40}{2}\right)^2 + 149,76^2}.$$

$$(\sigma_{1,2})' = -79,84 \pm 191,8 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \sigma_1' = 95,9 \text{ N/mm}^2, \sigma_2' = -271,64 \text{ N/mm}^2.$$

U točki A je na trećoj plohi naprezanje jednako nuli, pa su glavna naprezanja u toj točki:

$$\sigma_1 = 95,9 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -271,64 \text{ N/mm}^2. \quad (5.52)$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja je za točku A:

$$\sigma_{\text{ekv, NPN}}^A = \sigma_1 - \sigma_3 = 367,54 \text{ N/mm}^2. \quad (5.53)$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najveće gustoće distorzijske energije (HMH) izračunavamo prema:

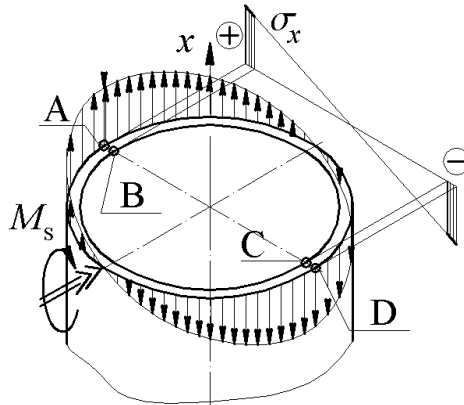
$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (5.54)$$

pa je u točki A ekvivalentno naprezanje prema HMH teoriji:

$$\sigma_{\text{ekv, HMH}}^A = \sqrt{\frac{1}{2}[(95,9)^2 + (271,64)^2 + (-271,64 - 95,9)^2]} = 330,2 \text{ N/mm}^2. \quad (5.55)$$

Komponente naprezanja u točki B su:

$$\sigma_x^B(r=48) = -159,74 \text{ N/mm}^2, \tau_T(r=48) = 119,81 \text{ N/mm}^2, \sigma_\varphi = 40 \text{ N/mm}^2. \quad (5.56)$$



Slika 5.14. Raspodjela naprezanja uslijed savijanja

Ove komponente nisu u jednoj ravnini pa ćemo glavna naprezanja izračunati prema:

$$(\sigma_{1,2})' = \frac{\sigma_x + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{-159,74 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-159,74 - 40}{2}\right)^2 + 119,81^2}. \quad (5.57)$$

$$(\sigma_{1,2})' = -59,87 \pm 155,98 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \sigma_1' = 96,11 \text{ N/mm}^2, \sigma_2' = -215,85 \text{ N/mm}^2.$$

Na trećoj plohi u toj točki je glavno naprezanje jednako 0, pa slijede glavna naprezanja:

$$\sigma_1 = 96,11 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = -215,85 \text{ N/mm}^2. \quad (5.58)$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja je za točku B:

$$\sigma_{\text{ekv, NPN}}^B = \sigma_1 - \sigma_3 = 311,96 \text{ N/mm}^2, \quad (5.59)$$

a ekvivalentno naprezanje prema HMM teoriji je:

$$\sigma_{\text{ekv, HMM}}^B = \sqrt{\frac{1}{2}[(96,11)^2 + (215,85)^2 + (-215,85 - 96,11)^2]} = 274,7 \text{ N/mm}^2. \quad (5.60)$$

Komponente naprezanja u točki C su:

$$\sigma_x^C(r=48) = 159,74 \text{ N/mm}^2, \tau_T(r=48) = 119,81 \text{ N/mm}^2, \sigma_\varphi = 40 \text{ N/mm}^2. \quad (5.61)$$

Ove komponente nisu u jednoj ravni pa ćemo glavna naprezanja izračunati prema

$$(\sigma_{1,2})' = \frac{\sigma_x + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{159,74 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{159,74 - 40}{2}\right)^2 + 119,81^2}. \quad (5.62)$$

$$(\sigma_{1,2})' = 99,87 \pm 133,94 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \sigma_1' = 233,81 \text{ N/mm}^2, \sigma_2' = -34,07 \text{ N/mm}^2.$$

Na trećoj plohi u toj točki je glavno naprezanje jednako 0, pa slijede glavna naprezanja:

$$\sigma_1 = 233,81 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2, \sigma_3 = -34,07 \text{ N/mm}^2. \quad (5.63)$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja je za točku C:

$$\sigma_{\text{ekv, NPN}}^C = \sigma_1 - \sigma_3 = 267,88 \text{ N/mm}^2. \quad (5.64)$$

a ekvivalentno naprezanje prema HMM teoriji je:

$$\sigma_{\text{ekv, HMM}}^C = \sqrt{\frac{1}{2}[(233,81)^2 + (34,07)^2 + (-34,07 - 233,81)^2]} = 256,7 \text{ N/mm}^2. \quad (5.65)$$

Komponente naprezanja u točki D su:

$$\sigma_x^D(r=60) = 199,68 \text{ N/mm}^2, \tau_T(r=60) = 149,76 \text{ N/mm}^2, \sigma_\varphi = 40 \text{ N/mm}^2. \quad (5.66)$$

Ove su komponente u jednoj ravni pa ćemo glavna naprezanja izračunati prema:

$$(\sigma_{1,2})' = \frac{\sigma_x + \sigma_\varphi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_\varphi}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{199,68 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{199,68 - 40}{2}\right)^2 + 149,76^2}. \quad (5.67)$$

$$(\sigma_{1,2})' = 119,84 \pm 169,7 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \sigma_1' = 289,54 \text{ N/mm}^2, \sigma_2' = -49,86 \text{ N/mm}^2.$$

U točki D je na trećoj plohi naprezanje jednako nuli, pa su glavna naprezanja u toj točki:

$$\sigma_1 = 289,54 \text{ N/mm}^2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -49,86 \text{ N/mm}^2. \quad (5.68)$$

Ekvivalentno naprezanje prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja je za točku D:

$$\sigma_{\text{ekv, NPN}}^D = \sigma_1 - \sigma_3 = 339,4 \text{ N/mm}^2. \quad (5.69)$$

a ekvivalentno naprezanje prema HMM teoriji je:

$$\sigma_{\text{ekv, HMH}}^C = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(289,54)^2 + (49,86)^2 + (-49,86 - 289,54)^2 \right]} = 317,4 \text{ N/mm}^2. \quad (5.70)$$

Uspoređujući ekvivalentno naprezanje u sve četiri točke prema obje teorije, možemo zaključiti da je najveće ekvivalentno naprezanje u točki A. To nam može poslužiti kao smjernica za još kraće određivanje kritičnog mjesta na cijevi opterećenoj raznim opterećenjima. Naime, ekvivalentno naprezanje je tim veće što je veća razlika normalnih naprezanja na različitim presjecima, u nekoj točki. Pod „razlika“ podrazumijevamo veću razliku vrijednosti na način da postoje pozitivne i negativne normalne komponente na 3 presjeka u nekoj točki. U točki A je jedno normalno naprezanje negativno, a drugo pozitivno. U točki D jesu iste apsolutne vrijednosti tih komponenta naprezanja, ali su oba istog predznaka, pa je i ekvivalentno naprezanje manje. Nadalje ćemo izračunavati komponente naprezanja, zatim glavnih i ekvivalentnog naprezanja za različite promjere cijevi i pokušati odrediti graničnu vrijednost promjera pri kojem je zadovoljen uvjet čvrstoće. Zadovoljavajuća točnost za određivanje promjera je razlika od 2% ekvivalentnog naprezanja u odnosu na dopušteno. Rezultate izračuna je najjednostavnije prikazati u tablici, što je prikazano u Tablici 5.1.

Tablica 5.1. Usporedba ekvivalentnih naprezanja za različite geometrije cijevi

D , mm	σ_x , N/mm ²	σ_φ , N/mm ²	τ_T , N/mm ²	$\left. \begin{matrix} \sigma_1, \\ \sigma_2, \\ \sigma_3, \end{matrix} \right\} \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{\text{ekv, NPN}}$, N/mm ²	$\sigma_{\text{ekv, HMH}}$, N/mm ²
150	-120,2	52,5	90,16	90,99 0 -158,7	249,7	218,9
200	-63,6	73,3	47,7	88,1 0 -78,6	166,9	144,6
230	-47	85,8	35,2	96,6 0 -55,7	150,3	131,6
240	-42,9	90	32,1	97,4 0 -50,2	147,6	130

Ovdje smo tražili promjer cijevi za koji je zadovoljen uvjet čvrstoće za obje teorije. Iz Tablice 1 je vidljivo da je uvjet čvrstoće prema teoriji HMH zadovoljen za promjer cijevi od malo manje od 200 mm, tj. za 200 mm je zadovoljen, dok prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja to je zadovoljeno tek za 240 mm.

Primjer 5.4. Prostorni konzolni nosač opterećen silama.

Na Slici 5.15. prikazan je nosač načinjen od cijevi promjera D/d opterećen silama. Odrediti promjer cijevi ako je debljina stijenke $s=4$, prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja. Zadano: $F_1=1500 \text{ N}$, $F_2=1000 \text{ N}$, $L_1=1000 \text{ mm}$, $L_2=200 \text{ mm}$, $L_3=400 \text{ mm}$.

Budući da je ovo zadatak iz Primjera 4.3. iskoristit ćemo rješenje za dijagrame momenta savijanja i uvijanja i uzdužne sile. kako je prikazano na Slici 4.13. Prvi mogući kritični presjek je označen na Slici 5.15. slovom A, te tamo izračunavamo rezultatni moment savijanja i uvijanja:

$$M_{y3}^A = F_2 L_3 = 1000 \cdot 400 = 400000 \text{ Nmm}, M_{z3}^A = F_1 L_3 = 1500 \cdot 400 = 600000 \text{ Nmm}. \quad (5.71)$$

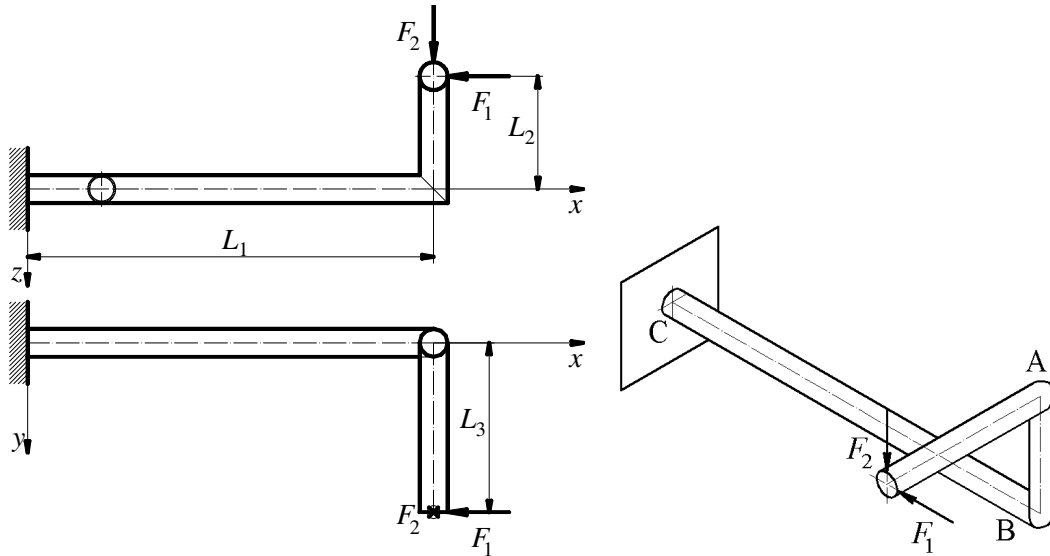
$$M_s^A = \sqrt{(M_{y3}^A)^2 + (M_{z3}^A)^2} = \sqrt{400000^2 + 600000^2} = 721000 \text{ Nmm}.$$

Drugi mogući kritični presjek je označen na Slici 5.15. slovom B, te tamo izračunavamo rezultatni moment savijanja i uvijanja:

$$M_{y2}^B = F_1 L_2 = 1500 \cdot 200 = 300000 \text{ Nmm}, M_{z2}^B = F_2 L_3 = 1500 \cdot 400 = 600000 \text{ Nmm}.$$

$$M_s^B = \sqrt{(M_{y2}^B)^2 + (M_{z2}^B)^2} = \sqrt{300000^2 + 600000^2} = 670800 \text{ Nmm}. \quad (5.72)$$

$$M_T^B = F_1 L_3 = 1500 \cdot 400 = 600000 \text{ Nmm}.$$



Slika 5.15. Prostorni konzolni nosač

Treći mogući kritični presjek je označen na Slici 5.15. slovom C, te tamo izračunavamo rezultatni moment savijanja i uvijanja:

$$M_{y1}^C = F_2 L_1 - F_1 L_2 = 1000 \cdot 1000 - 1500 \cdot 200 = 700000 \text{ Nmm}.$$

$$M_{z1}^C = F_1 L_3 = 1500 \cdot 400 = 600000 \text{ Nmm}.$$

$$M_s^C = \sqrt{(M_{y1}^C)^2 + (M_{z1}^C)^2} = \sqrt{700000^2 + 600000^2} = 922000 \text{ Nmm}. \quad (5.73)$$

$$M_T^C = F_2 L_3 = 1000 \cdot 400 = 400000 \text{ Nmm}.$$

Uspoređujući iznose momenta savijanja i uvijanja u odabranim presjecima, uzimajući pritom u obzir jednadžbu za izračun ekvivalentnog momenta (5.38) prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja, presjek C ima najveći ekvivalentni moment, iznosa:

$$M_{ekv}^C = \sqrt{(M_s^C)^2 + (M_T^C)^2} = \sqrt{922000^2 + 400000^2} = 1005000 \text{ Nmm}. \quad (5.74)$$

Dimenzioniranje konzole se nadalje provodi prema jednadžbi (5.39) pa slijedi:

$$\frac{\pi(D^4 - (D-8)^4)}{32D} > \frac{M_{ekv}}{\sigma_{dop}} \Rightarrow \frac{(D^4 - (D-8)^4)}{D} > \frac{1005000}{220} \frac{32}{\pi} = 46531,12 \text{ mm}^3. \quad (5.75)$$

U jednadžbi (5.75) nije lako izraziti vanjski promjer D eksplicitno, pa ćemo koristiti princip pokušaj – pogreška za pronalaženje prihvatljivo približne vrijednosti za promjer, koje je prikazano:

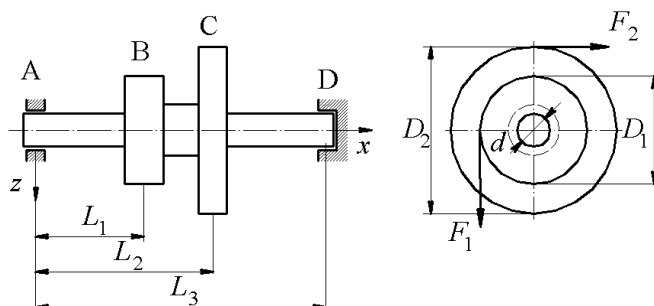
$$\begin{aligned} D = 70 \text{ mm} &\Rightarrow (D^4 - (D-8)^4) / D = 131909 \text{ mm}^3, \\ D = 50 \text{ mm} &\Rightarrow (D^4 - (D-8)^4) / D = 62766 \text{ mm}^3, \\ D = 40 \text{ mm} &\Rightarrow (D^4 - (D-8)^4) / D = 37786 \text{ mm}^3, \\ D = 45 \text{ mm} &\Rightarrow (D^4 - (D-8)^4) / D = 49477 \text{ mm}^3. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Iz jednadžbi (5.76) je vidljivo da je zadovoljavajuće točna vrijednost za vanjski promjer $D = 45 \text{ mm}$.

Primjer 5.5. Idealno vratilo

Na Slici 5.16. prikazano je vratilo promjenjivog promjera d s užetnicama. Užetnicom B, promjera D_1 , dovodi se snaga P . Zanemarujući gubitke, užetnicom C, promjera D_2 , ta se snaga odvodi. Odrediti promjere vratila prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja prema kriteriju „idealnog vratila“. Zadano:

$$F_1 = 1500 \text{ N}, D_1 = 2000 \text{ mm}, D_2 = 1000 \text{ mm}, L_1 = 150 \text{ mm}, L_2 = 250 \text{ mm}, L_3 = 450 \text{ mm}, \sigma_{\text{dop}} = 150 \text{ N/mm}^2.$$



Slika 5.16. Vratilo opterećeno silama

Sila F_1 stvara moment uvijanja koji uravnotežuje sila F_2 . Iz uvjeta ravnoteže momenta uvijanja možemo izračunati silu F_2 prema:

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow F_1 \frac{D_1}{2} = F_2 \frac{D_2}{2} \rightarrow F_2 = F_1 \frac{D_1}{D_2} = 1500 \frac{2000}{1000} = 3000 \text{ N}. \quad (5.77)$$

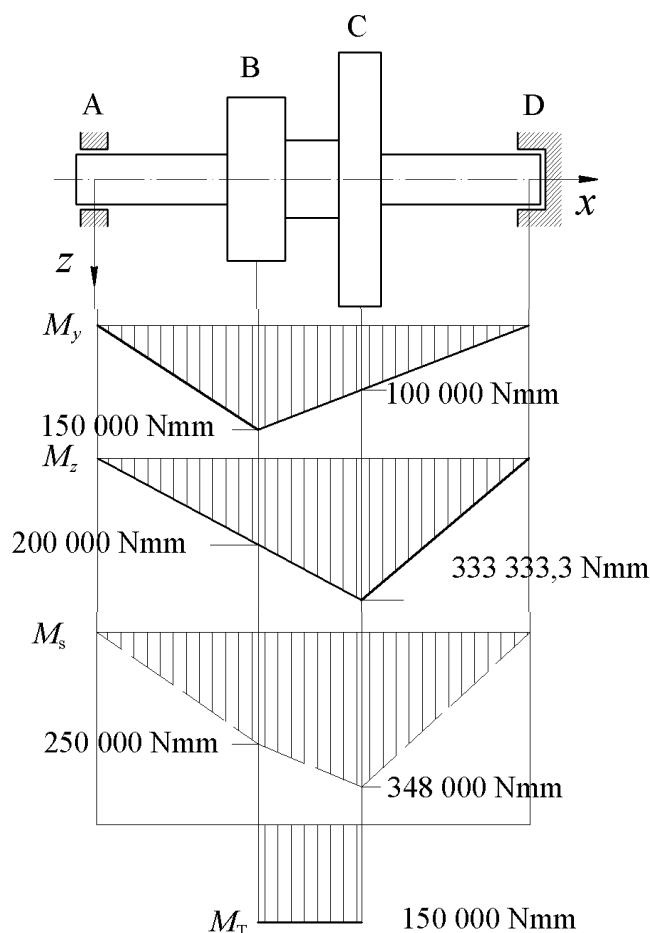
Reakcije u ležajevima u Oxz i Oxy su:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z &= 0 \rightarrow F_A^z - F_1 + F_D^z = 0. \\ \Sigma M_y^A &= 0 \rightarrow F_1 L_1 + F_D^z L_3 = 0. \\ F_D^z &= F_1 L_1 / L_3 = 1500(150 / 450) = 500 \text{ N}. \\ F_A^z &= F_1 - F_D^z = 1500 - 500 = 1000 \text{ N}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0 \rightarrow F_A^y - F_2 + F_D^y = 0. \\ \Sigma M_z^A &= 0 \rightarrow F_2 L_2 + F_D^y L_3 = 0. \\ F_D^y &= F_2 L_2 / L_3 = 3000(250 / 450) = 1666, \dot{6} \text{ N}. \\ F_A^y &= F_2 - F_D^y = 3000 - 1666, \dot{6} = 1333, \dot{3} \text{ N}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} F_D &= \sqrt{(F_D^y)^2 + (F_D^z)^2} = \sqrt{(1666, \dot{6})^2 + (500)^2} = 1740 \text{ N}. \\ F_A &= \sqrt{(F_A^y)^2 + (F_A^z)^2} = \sqrt{(1333, \dot{3})^2 + (1000)^2} = 1666, \dot{6} \text{ N}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Na osnovi izračunatih reakcija u ležajevima možemo izračunati momente savijanja i uvijanja po vratilu, prikazano na Slici 5.17. U kontekstu optimiranja strojnih dijelova, prvenstveno uštede materijala, možemo izračunati promjer vratila kao funkciju koordinate x (naravno, u konačnom skupu točaka, npr. 5 do 10 točaka), i to koristiti kao temelj za konstruiranje vratila minimalne mase. Drugi aspekt optimiranja je tehnologičnost izrade, i sama cijena uslijed potrebnih načina i količine obrade, odvajanjem čestica ili deformiranjem, što sve nije uzeto u obzir u ovom proračunu. Idealno ovdje služi za isticanje principa određivanja promjera vratila, za određeno mjesto uzduž vratila, takvog da je najveće naprezanje (ili ekvivalentno) jednako dopuštenom, tj. materijal je iskorišten svugdje najbolje moguće. Prema teoriji najvećeg posmičnog naprezanja računamo ekvivalentni moment, pa iz te vrijednosti promjer.



Slika 5.17. Dijagrami momenata savijanja i uvijanja za vratilo

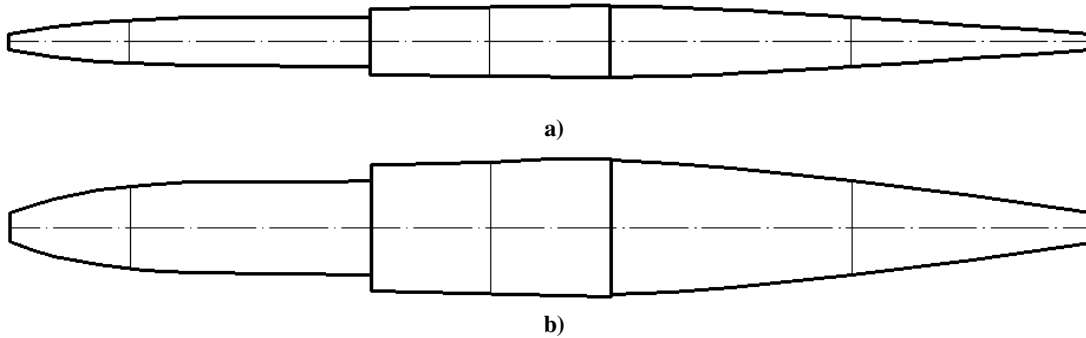
Za svaku odabranu točku tražit ćemo da je ispunjen uvjet čvrstoće:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sigma_{\text{dop}} \rightarrow \frac{\pi d^3}{32} = \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \left| M_{\text{ekv}} = \sqrt{M_s^2 + M_T^2} \right| \Rightarrow d^3 = \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi}}. \quad (5.81)$$

Na mjestu djelovanja reakcija u ležajevima nema savijanja, no, postoji posmično naprezanje uslijed poprečne sile, što znači da će kriterij za dimenzioniranje tog promjera biti najveće posmično naprezanje. Raspodjela posmičnog naprezanja po okruglom presjeku je prema [1] parabolična, s najvećom vrijednosti $\tau_{\text{max}} = 4F_R / 3A$. Postavit ćemo uvjet da je najveće posmično naprezanje manje od dopuštenog τ_{dop} , koje za duktilne materijale možemo u nedostatku točnijih podataka uzeti prema [1] $\tau_{\text{dop}} = \sigma_{\text{dop}} / 2$.

Karakteristične točke za izračun promjera idealnog vratila su mjesta ležaja, ili prijelaza s ležajnog rukavca na širi promjer, mjesto početka djelovanja momenta uvijanja, mjesto najvećeg momenta savijanja itd. S proračunatih devet promjera možemo nacrtati idealno vratilo prema zadanim podacima, koje je prikazano na Slici 5.18. Na Slici 5.18. a) prikazano je idealno vratilo u mjerilu. Radi isticanja skoka u promjeru na mjestu uvođenja momenta uvijanja na sredini uženice, Na Slici 5.18. b) je prikazano idealno vratilo s promjerima dvostruko uvećanim. Izraženiji skok u promjeru je vidljiv na $x = 150$ mm, sredini užetnice B, gdje je veći moment uvijanja u odnosu na moment savijanja. Taj je skok manje izražen na $x = 250$ mm, sredini užetnice C, gdje je moment savijanja značajnije veći od momenta uvijanja. Promjeri po odabranim mjestima su:

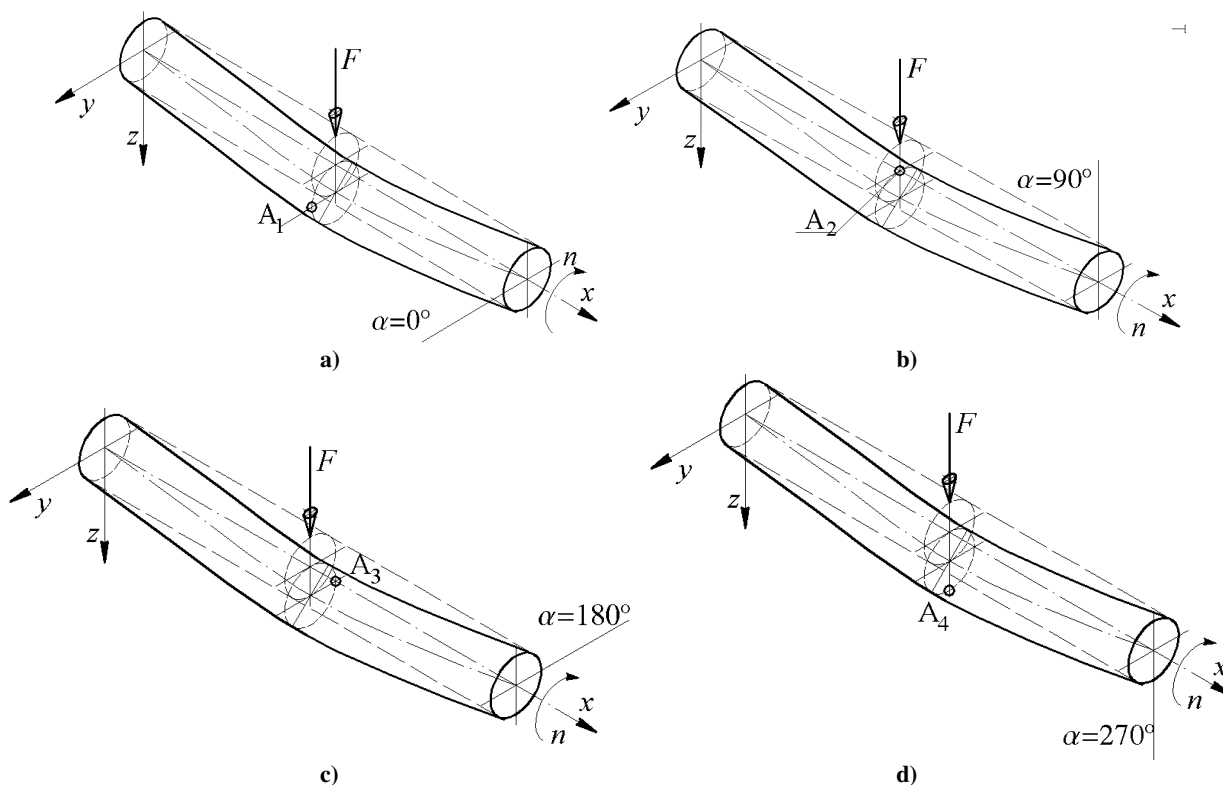
$$\begin{aligned}
 x_1 = 0_+ \Rightarrow \tau_{xz} &= \frac{4 F_R}{3 A} \leq \tau_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \Rightarrow A = \frac{8 F_R}{3 \sigma_{\text{dop}}}. \\
 d_{0+} &= \sqrt{\frac{32 F_R}{3 \pi \sigma_{\text{dop}}}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 1666,6}{3 \pi \cdot 150}} = 6,14 \text{ mm}. \\
 x_2 = 50 \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{50} > \sqrt[3]{\frac{83333 \cdot 32}{150 \pi}} = 17,82 \text{ mm}. \\
 x_3 = 150_- \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{150-} > \sqrt[3]{\frac{250000 \cdot 32}{150 \pi}} = 20,26 \text{ mm}. \\
 M_{\text{ekv},150+} &= \sqrt{(M_{s,150+})^2 + (M_{T,150+})^2} = \sqrt{(250000)^2 + (150000)^2} = 291500 \text{ Nmm}. \\
 x_4 = 150_+ \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{150+} > \sqrt[3]{\frac{291500 \cdot 32}{150 \pi}} = 27,05 \text{ mm}. \\
 M_{\text{ekv},200} &= \sqrt{(M_{s,200})^2 + (M_{T,200})^2} = \sqrt{(294500)^2 + (150000)^2} = 330500 \text{ Nmm}. \\
 x_5 = 200 \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{200} > \sqrt[3]{\frac{330500 \cdot 32}{150 \pi}} = 28,21 \text{ mm}. \\
 M_{\text{ekv},250-} &= \sqrt{(M_{s,250-})^2 + (M_{T,250-})^2} = \sqrt{(348000)^2 + (150000)^2} = 379000 \text{ Nmm}. \\
 x_6 = 250_- \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_{\text{ekv}}}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{200+} > \sqrt[3]{\frac{379000 \cdot 32}{150 \pi}} = 29,52 \text{ mm}. \\
 x_7 = 250_+ \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{250+} > \sqrt[3]{\frac{348000 \cdot 32}{150 \pi}} = 28,7 \text{ mm}. \\
 x_8 = 350 \Rightarrow \frac{\pi d^3}{32} &> \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \Rightarrow d^3 > \frac{M_s}{\sigma_{\text{dop}}} \frac{32}{\pi} \Rightarrow d_{350} > \sqrt[3]{\frac{121800 \cdot 32}{150 \pi}} = 20,22 \text{ mm}. \\
 x_9 = 450_- \Rightarrow \tau_{xz} &= \frac{4 F_R}{3 A} \leq \tau_{\text{dop}} = \frac{\sigma_{\text{dop}}}{2} \Rightarrow A = \frac{8 F_R}{3 \sigma_{\text{dop}}}. \\
 d_{450-} &= \sqrt{\frac{32 F_R}{3 \pi \sigma_{\text{dop}}}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 1740}{3 \pi \cdot 150}} = 6,28 \text{ mm}.
 \end{aligned}
 \tag{5.82}$$



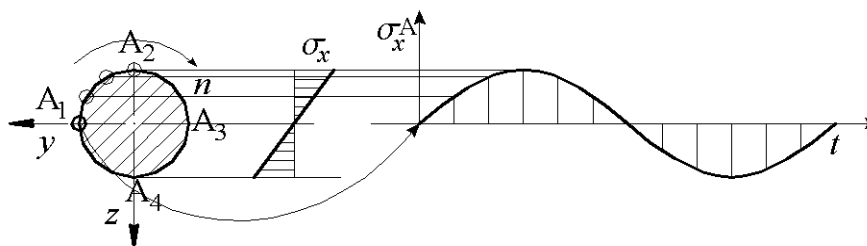
Slika 5.18. Idealno vratilo, a) realan prikaz, b) promjeri dvostruko uvećani

6. DINAMIČKA ČVRSTOĆA

Pod pojmom promjenjivo opterećenje podrazumijeva se vremenski promjenjivo opterećenje, ali je možda i bolje reći takvo opterećenje koje uzrokuje vremenski promjenjivo naprezanje u materijalu. Primjerice, osovina na dva ležaja, prikazana na Slici 6.1., koja rotira i opterećena je stalnom poprečnom silom na sredini, ima stalno opterećenje, ali promjenjivo naprezanje u nekoj točki materijala. Na Slici 6.2. prikazana je promjena naprezanja u nekoj točki na obodu osovine koja rotira. Budući da se položaj točke A mijenja u odnosu na neutralnu os u ravнини Oxz , mijenja se naprezanje po iznosu i predznaku. Na Slici 6.1. a) je točka A u položaju A_1 , pa je udaljenost od neutralne osi 0, stoga je i naprezanje 0, što je predstavljeno točkom u ishodištu na Slici 6.2. Kako rotira osovina, točka A mijenja položaj prema gore, i tako se udaljava od neutralne osi, pa je u nekom trenutku na najvišem položaju od neutralne osi, položaj A_2 , te stoga i na najvećem naprezanju, prema Slici 6.1. b). Daljnjom rotacijom smanjuje se udaljenost točke A od neutralne osi, koja je predstavljena točkom A_3 , pa se naprezanje približava 0, prema Slici 6.1. c). Nakon toga rotiranjem osovine se točka A udaljava od neutralne osi u suprotnom smjeru, pa naprezanje raste i ima suprotni predznak, do točke A_4 , Slika 6.1. d). Dakle, iako je opterećenje na osovini konstantno, naprezanje se u materijalu može mijenjati tijekom vremena.



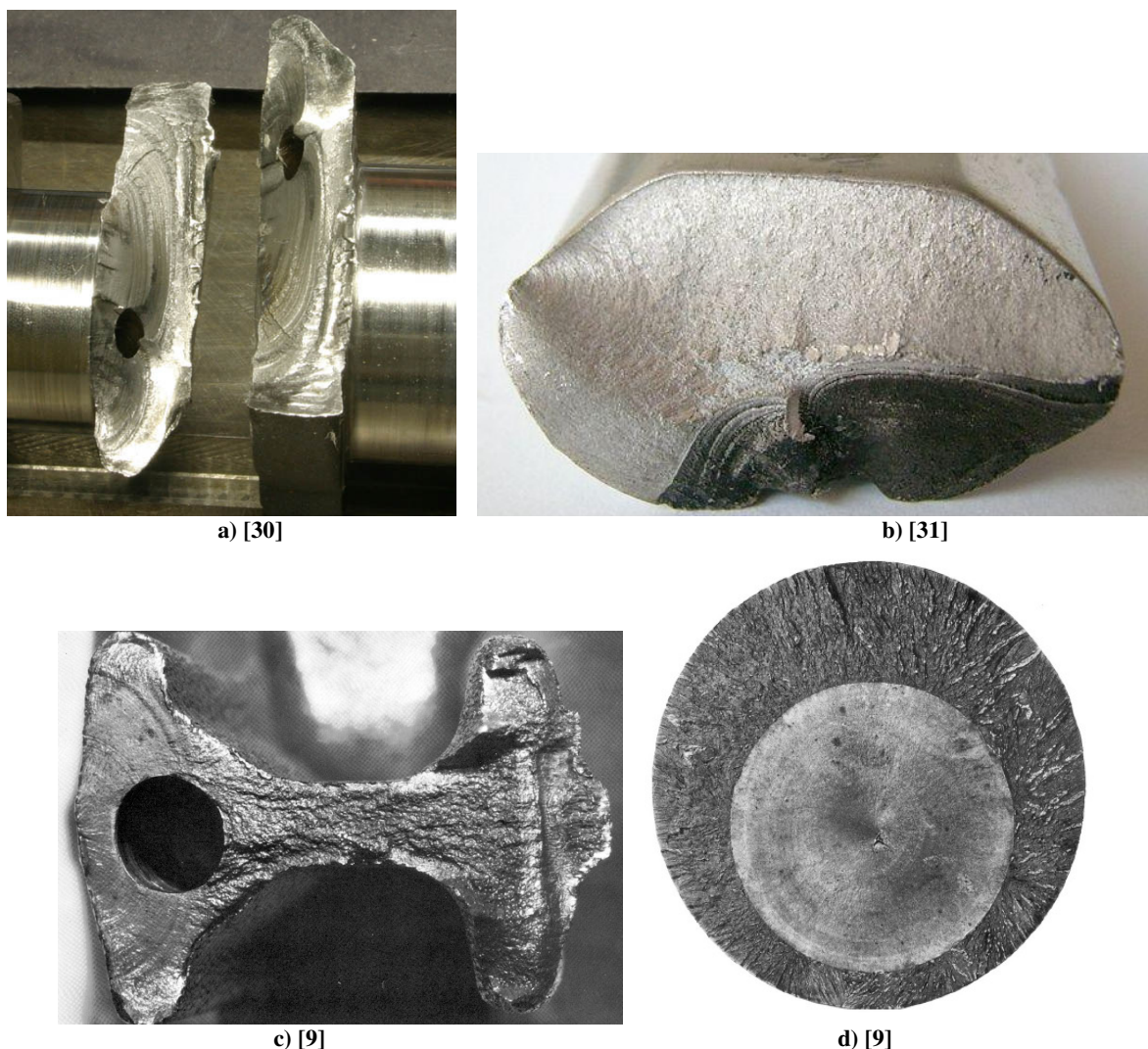
Slika 6.1. Rotiranje osovine na dva oslonca: a) položaj 0° , b) položaj 90° , c) položaj 180° , d) položaj 270°



Slika 6.2. Promjena naprezanja pri rotiranju osovine na dva oslonca

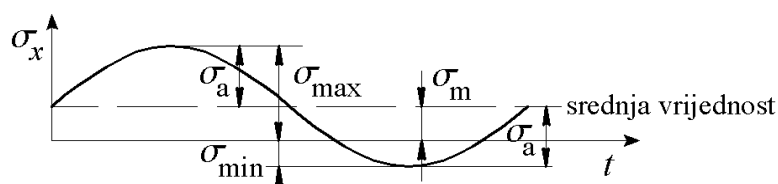
Na Slici 6.3. a) prikazan je lom koljenastog vratila motora s unutrašnjim izgaranjem. Tamniji dio površine loma je nastao kroz cikluse naprezanja, a počinje s ruba provrta. Na Slici 6.3. b) prikazan je lom pedale bicikla. Lom počinje s površine na kojoj je naprezanje uslijed savijanja bilo najveće, a postojala je početna

greška u materijalu ili na površini uslijed obrade. Na Slici 6.3. c) prikazan je lom spojnice u klipnom stroju. Pukotina se širila od vanjske površine kao mjesta s najvećim naprežanjem i blizini uzročnika koncentracije naprežanja. Na Slici 6.3. d) prikazan je lom štapa za podizanje čekića u kovačkom stroju. Taj je štap opterećen aksijalno pa je površina cikličnog oštećenja u unutrašnjosti presjeka, jer je jednako vjerojatno da se pukotina počne širiti ili s površine ili iz sredine, jer je nominalno naprežanje svugdje po presjeku jednako, koncentracija naprežanja dolazi od mikronepravilnosti u građi materijala. Više detalja čitatelj može pronaći u [7].



Slika 6.3. Lomovi uslijed umora materijala: a) koljenasto vratilo, b) pedala, c) spojnica, d) štap čekića

6.1. Ciklus naprežanja



Slika 6.4. Ciklus naprežanja

Karakteristične veličine u svakom ciklusu naprežanja, prikazanom kao sinusoida na Slici 6.4., su srednja vrijednost, σ_m , amplituda, σ_a , te maksimalna i minimalna $\sigma_{\max}$, $\sigma_{\min}$. Period ciklusa naprežanja je T , no, ispitivanja dinamičke čvrstoće materijala su pokazala da frekvencija promjene naprežanja ne utječe značajno na čvrstoću, stoga nije označen kao utjecajna veličina. Omjer najvećeg i najmanjeg naprežanja označen je kao faktor asimetričnosti ciklusa:

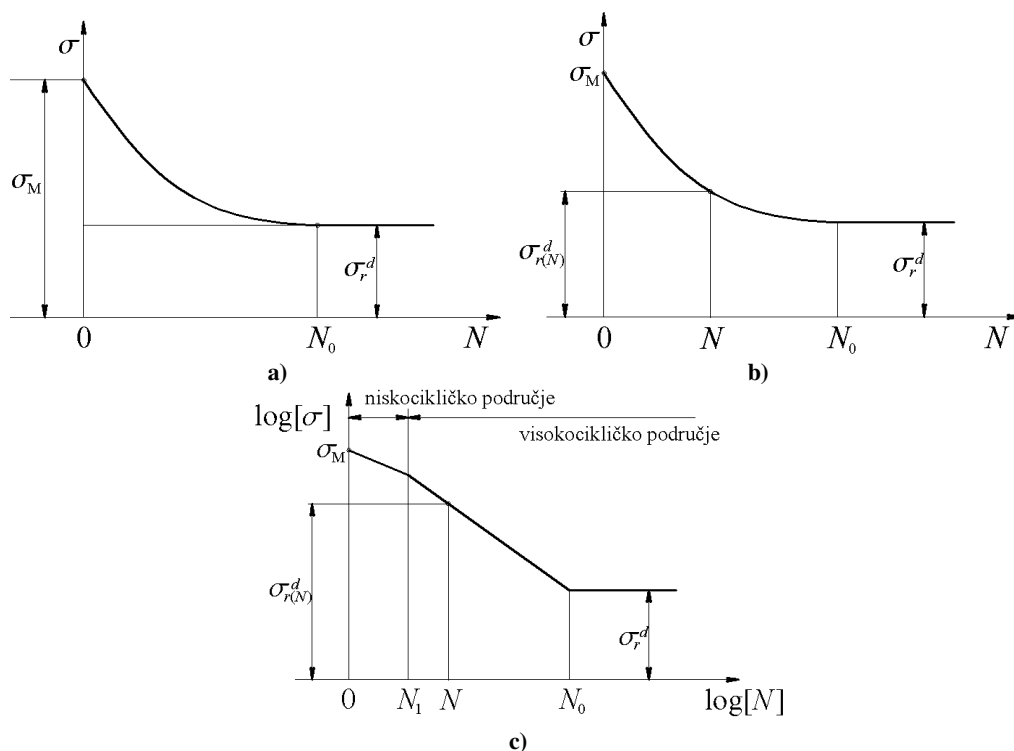
$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (6.1)$$

U slučaju rotiranja deformiranog štapa, naprezanje σ_x u nekoj točki materijala na obodu štapa se mijenja harmonijski, sinusoidalno, opisano na Slici 6.1., pri čemu je srednja vrijednost ciklusa naprezanja $\sigma_m = 0$, a amplituda $\sigma_a = (M_y / I_y) r$.

6.2. Wöhlerov dijagram

Prvi je osjetljivost na promjenjivo naprezanje primijetio i mjerio A. Wöhler, 1859. Primijetio je pojavu pucanja na osovinama vagona, koje su pucale pri manjim opterećenjima od statičke čvrstoće. Proveo je mjerenja na uzorcima s različitim amplitudama naprezanja i mjerio broj ciklusa do loma. Ta mjerenja prikazana u dijagramu zovemo Wöhlerov dijagram, prikazan na Slici 6.5. Za čelik se pokazalo da nakon oko 10^6 ciklusa naprezanje koje može izdržati više ne opada (za čelik gotovo uopće ne opada, dok za legure obojenih metala još uvijek opada, ali je dogovorno postavljen taj broj), pa je to prozvano trajnom dinamičkom čvrstoćom. Za aluminijske i bakrene legure taj broj je oko 10^9 . Krivulja koja je redovno prikazana u Wöhlerovom dijagramu predstavlja vrijednosti za koje je 95% ispitnih uzoraka izdržalo ispitivanje, budući da uvijek postoji rasipanje rezultata ispitivanja. Uobičajeni Wöhlerov dijagram je prikazan na Slici 6.5. a). Oznaka čvrstoće materijala ima dodatne oznake, tako da je donji indeks “ r ” oznaka faktora asimetričnosti ciklusa, a gornji indeks “ d ” označava “dinamička” kako bismo razlikovali tu vrijednost od bilo koje statičke vrijednosti naprezanja.

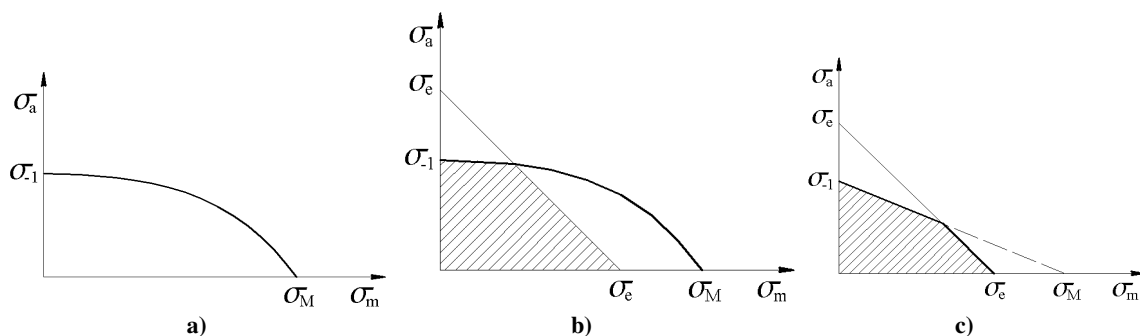
Kada materijal, odnosno strojni dio, doživi lom uslijed promjenjivog naprezanja, kažemo da je došlo do loma uslijed umora (stariji izraz zamora) materijala [7, 16]. Pojednostavljeno rečeno, lom uslijed umora materijala predstavlja širenje, odnosno napredovanje oštećenja kroz materijal, u obliku pukotine, do trenutka kada preostali nosivi materijal presjeka ne može podnijeti nastalo naprezanje i nastaje nagli lom. U materijalu uvijek postoje nesavršenosti građe, kao što su u čelicima uključine, dislokacije, šupljine, pukotine, itd. Na mjestima lokalnih koncentracija naprezanja uslijed nesavršenosti građe nastaju uvjeti za širenje tog oštećenja svakim ciklusom naprezanja. Ovisno o veličini naprezanja, otpornosti materijala širenju oštećenja, karakteristici ciklusa naprezanja i sl. mogu se sve nesavršenosti građe širiti, i spajati u veća oštećenja, koja u konačnici dovode do loma dijela. Budući da je širenje oštećenja polagano, jer se broj ciklusa naprezanja do loma broji u tisućama, do milijuna ili čak milijardi, ovisno o materijalu i strojnom dijelu, to napredovanje po ciklusu je relativno malo. Površina koja je povezana sa širenjem oštećenja kroz cikluse naprezanja je obično svijetla, zrcalna, osim eventualno u agresivnim atmosferama, kada svaka slobodna površina može oksidirati. Površina koja je vezana s naglim lomom je obično gruba, nezrcalna. Jedno ili više mjesta (točaka) se nazire iz presjeka kao mjesto(a) početka širenja oštećenja. Ispitivanja materijala pokazala su da je najmanja dinamička čvrstoća za simetrični ciklus, s $r = -1$. U Wöhlerovom dijagramu je, ako drugačije nije naznačeno, prikazana dinamička čvrstoća za simetrični ciklus, $r = -1$. Na Slici 6.5. b) prikazan je očitavanje vrijednosti dopuštenog naprezanja u materijalu za određeni broj ciklusa do loma (ovo nazivamo vremenskom čvrstoćom, budući je prihvatljivo da strojni dio izdrži samo određeni broj ciklusa, N). Na Slici 6.5. c) prikazan je Wöhlerov dijagram u log – log mjerilu. U tom mjerilu je istaknuta vrijednost prijelaza tzv. niskocikličkog područja, do broja ciklusa N_1 . Vremensku čvrstoću označavamo s $\sigma_{r(N)}^d$. Za bilo koji drugi ciklus, postoje druge vrste dijagrama iz kojih se mogu očitati svojstva materijala za određeni ciklus. Jedan takav dijagram je Haighov dijagram. Drugi najčešće korišteni dijagram, dostupan u raznoj literaturi je Smithov dijagram.



Slika 6.5. Wöhlerovi dijagrami: a) oznaka dinamičke čvrstoće, b) oznaka vremenske i dinamičke čvrstoće, c) u log-log mjerilu

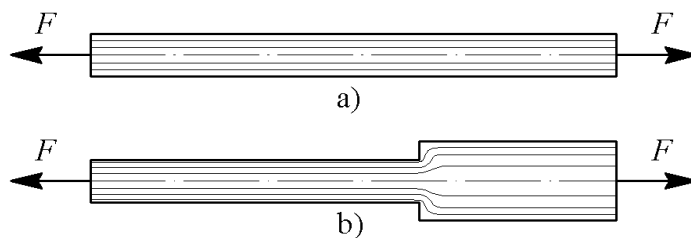
6.3. Haighov dijagram

Za slučajeve kada je ciklus asimetričnosti ciklusa različite od $r = -1$, jedan od dijagrama iz kojega je moguće očitati podatak o dinamičkoj čvrstoći materijala je Haighov dijagram [7, 16], prikazan na Slici 6.6. Krivulja na Slici 6.6. a) je granična vrijednost, tj. funkcija dopuštene amplitude za određeno srednje naprezanje koje materijal može izdržati. No, kako u strojnim elementima ne želimo pojavu plastičnog tečenja (deformacije), tako ćemo se ograničiti od određenih stanja naprezanja koja uzrokuju pojavu plastičnog tečenja, u kontekstu Haighovog dijagrama, kako je prikazano na Slici 6.6. b). Šrafirano područje je predstavlja dopustiva stanja naprezanja, tako da ne dođe do loma uslijed umora materijala, ni pojave plastičnog tečenja. Naprezanje σ_e predstavlja granicu tečenja, odnosno elastičnosti. Naprezanje σ_M predstavlja statičku čvrstoću. Za točno opisivanje amplitude u Haighovom dijagramu su potrebna brojna ispitivanja, koja su vremenski zahtjevna, pa se stoga pojednostavljuje dijagram, a jedan od načina pojednostavljenja je prikazan na Slici 6.6. c), s manje podataka. Pojednostavljenje znači da nije dopustiva pojava plastične deformacije, znači granica ukupnog naprezanja je granica tečenja, koje uz statičku čvrstoću i dinamičku čvrstoću za simetričan ciklus predstavlja sve vrijednosti koje su potrebne.

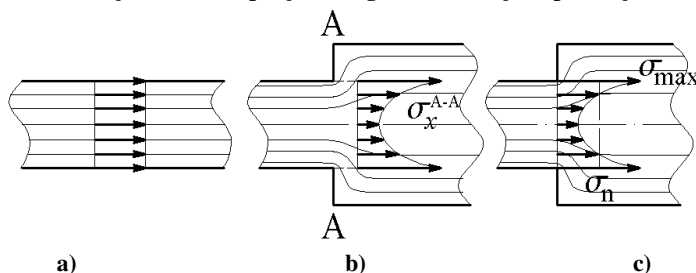


Slika 6.6. Haighovi dijagrami: a) osnovni prikaz, b) označeno šrafirano područje bez plastične deformacije, c) shematiziran

površine, utjecaju atmosfere, odnosno okoline, veličini, temperaturi i mnogim drugim utjecajnim veličinama. Najznačajniji utjecajni parametar u “uobičajenim” uvjetima rada je geometrija dijela, odnosno koncentracija napreznja [7, 9, 16, 20, 21] uslijed geometrije. Kao najjednostavniji primjer za koncentraciju napreznja koristi štap jednolikog okruglog presjeka, opterećen silama na krajevima, kako je prikazano na Slici 6.9.



Slika 6.9. Raspodjela napreznja u štapu: a) jednolika raspodjela, b) nejednolika raspodjela zbog koncentracije napreznja



Slika 6.10. Raspodjela napreznja u štapu: a) jednolika raspodjela, b) raspodjela napreznja na naglom proširenju A-A, c) nominalno i maksimalno napreznje

Na Slici 6.9. a) tanke crte predstavljaju zamišljene silnice, tj. raspodjelu napreznja u materijalu, koje su ravnomjerne po presjeku na cijelom štapu, ako sile ne djeluje koncentrirano na krajevima, prema St’Venantovom principu [1]. Na mjestu promjene geometrije, Slika 6.9 b), nastaju uvjeti za “zgušćivanje” silnica zbog nagle promjene geometrije štapa. Neposredno prije naglog proširenja je raspodjela napreznja jednaka kao na istom mjestu jednolikog štapa, dok najveća promjena nastaje na mjestu početka promjera, koje možemo zvati “korijen” prijelaza. Na Slici 6.10. prikazana je raspodjela napreznja u slučaju štapa jednolikog presjeka a) i naglog proširenja b). Najveće napreznje na kritičnom mjestu je nazvano vršno napreznje $\sigma_{\max}$, na Slici 6.10. c), koje je za neki faktor veće od prosječnog napreznja, označenog sa σ_n , koje bismo mogli izračunati prema $\sigma_n = F / A$. Vršno napreznje, označeno $\sigma_{\max}$, je za faktor koncentracije napreznja veće od nominalnog ili srednjeg napreznja $\sigma_{\max} = \alpha_k \sigma_n$. Ovdje je α_k nazvan faktor koncentracije napreznja. Osnovni način određivanja faktora koncentracije napreznja za neki materijal i strojni dio kombinirano je mjerenjem, usporedbom dinamičkog napreznja koje izdrži ispitni uzorak bez geometrijske koncentracije napreznja, i onog s geometrijskom koncentracijom napreznja, prema:

$$\alpha_{k, \text{ef}} = \frac{\sigma_d (\text{uzorka bez koncentracije napreznja})}{\sigma_d (\text{uzorka s koncentracijom napreznja})}. \quad (6.2)$$

Ovdje sa $\alpha_{k, \text{ef}}$ označavamo tzv. efektivni ili stvarni faktor koncentracije napreznja, kao jedini mjerodavni, u kontekstu, za takvu geometriju strojnog dijela od tog materijala. Budući da su mjerenja općenito skuplja od analitičkog ili numeričkog rješenja jednadžbi koje opisuju raspodjelu i koncentraciju napreznja, u literaturi je najčešće prikazan faktor koncentracije napreznja dobiven analizom (analitički ili numerički, ponekad eksperimentalno fotoelasticimetrijom) parametarski opisanog strojnog dijela, koji zovemo teorijski faktor koncentracije napreznja $\alpha_{k, \text{t}}$. Tako u literaturi imamo dostupne dijagrame teorijskog faktora koncentracije napreznja kao funkcije parametara omjera promjera i radijusa prema promjeru. Budući da različiti materijali nisu jednako “osjetljivi” na istu geometrijsku promjenu, npr. prijelaz sa d_1 na d_2 , potrebno je uvesti i dodatni parametar u izračunu, odnosno procjeni faktora koncentracije napreznja, koji zovemo zarezna osjetljivost, q . U literaturi su dostupni podaci za zareznu osjetljivost materijala od tabličnog prikaza u kojem je prikazano područje u kojem je vrijednost q za neki materijal ili grupu materijala, dok u drugoj literaturi zarezna osjetljivost izračunata iz čvrstoće materijala jednadžbom. Zarezna

osjetljivost se koristi za procjenu efektivnog faktora koncentracije naprezanja prema tzv. *Neuberovoj* [9, 20, 21] jednadžbi:

$$\alpha_{k,ef} = 1 + q(\alpha_{k,t} - 1). \quad (6.3)$$

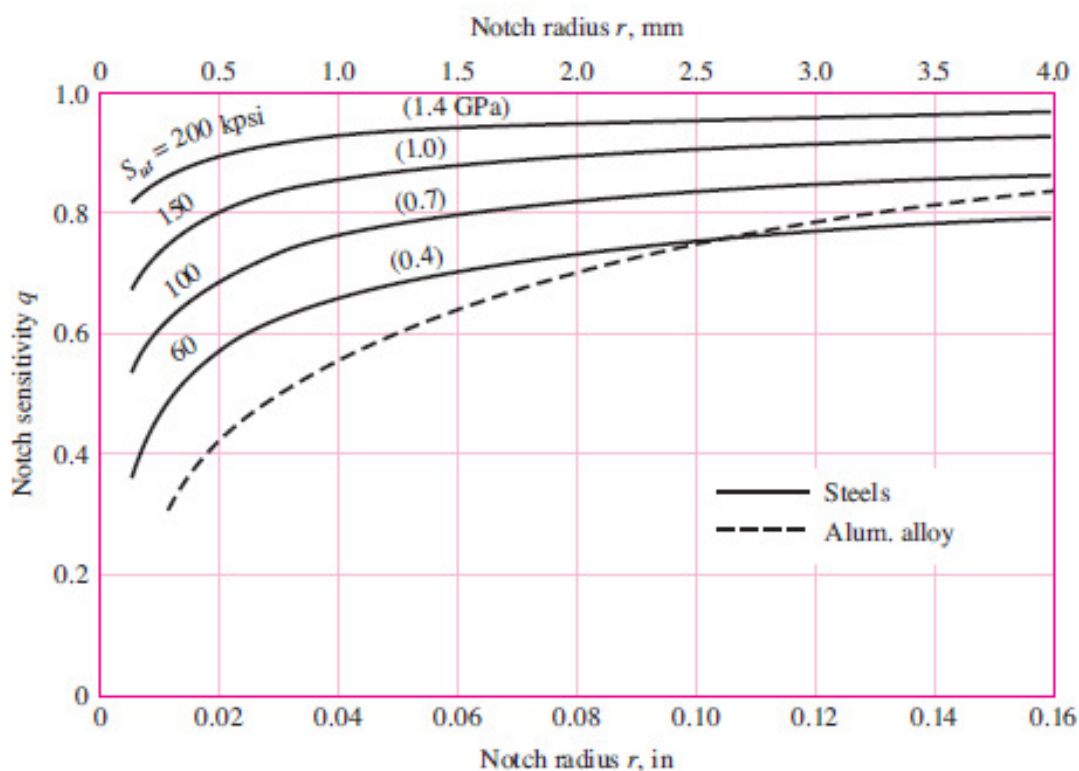
Zarezu osjetljivost q izračunavamo prema Neuberu pomoću jednadžbe:

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{r}}}, \quad (6.4)$$

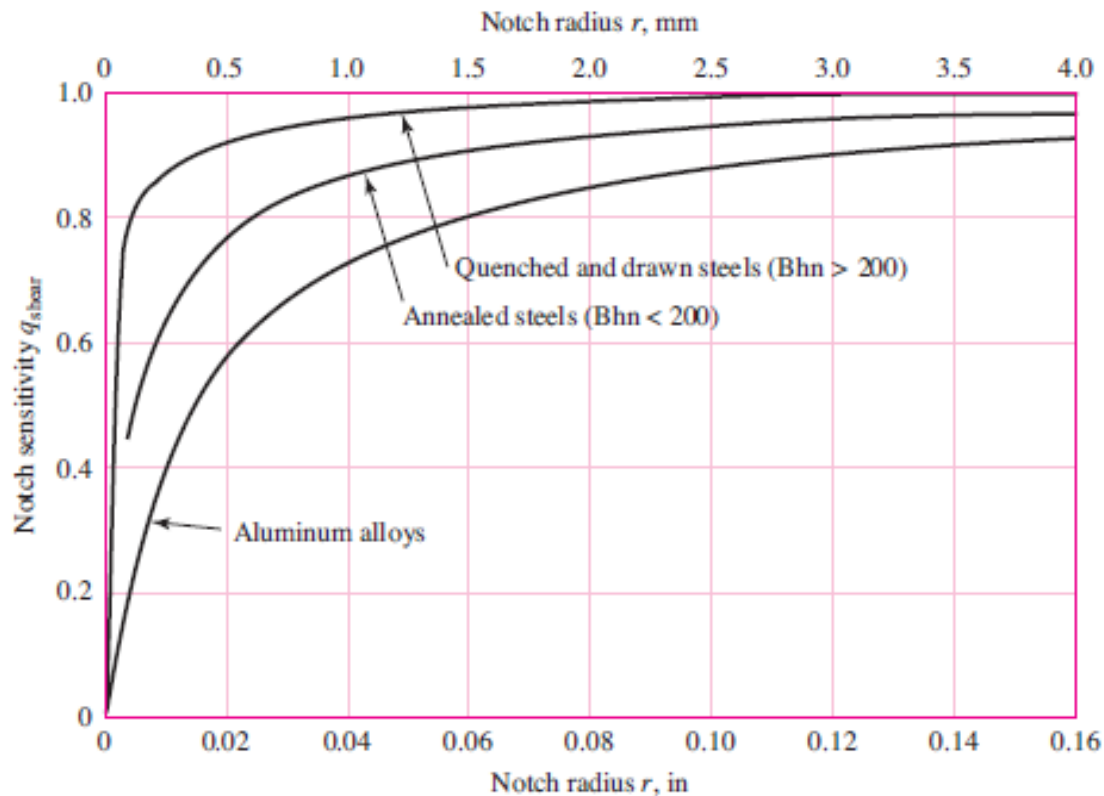
gdje su r radijus zakrivljenosti prijelaza i $\sqrt{a}$ karakteristika (konstanta) materijala i aproksimirana je polinomom prema:

$$\sqrt{a} = 0,2458 - 3,078 \cdot 10^{-3} \sigma_M + 1,5087 \cdot 10^{-5} (\sigma_M)^2 - 2,67 \cdot 10^{-8} (\sigma_M)^3, \quad (6.5)$$

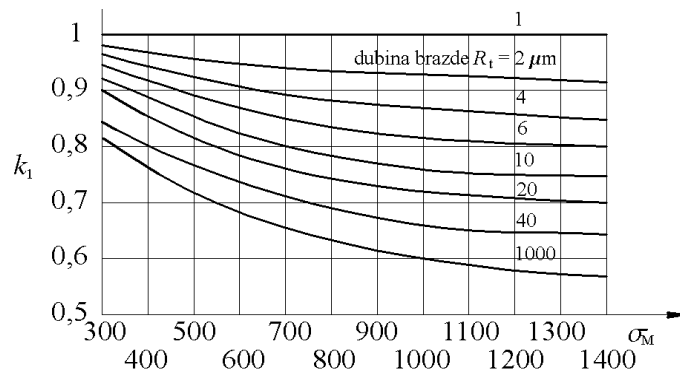
gdje je σ_M statička čvrstoća izražena u *kpsi*, 1 *kpsi* = 6,895 MPa. Jednadžba (6.5) daje $\sqrt{a}$ u $\sqrt{\text{in}}$. Za izračunavanje zarezne osjetljivosti za niskolegirane čelike pri uvijanju, koristi se jednadžba (6.5), s promjenom vrijednosti čvrstoće dodavanjem 20 *kpsi* čvrstoći.



Slika 6.11. Zarezu osjetljivost prema H. Neuberu [9] za savijanje i osno opterećenje, $r = -1$

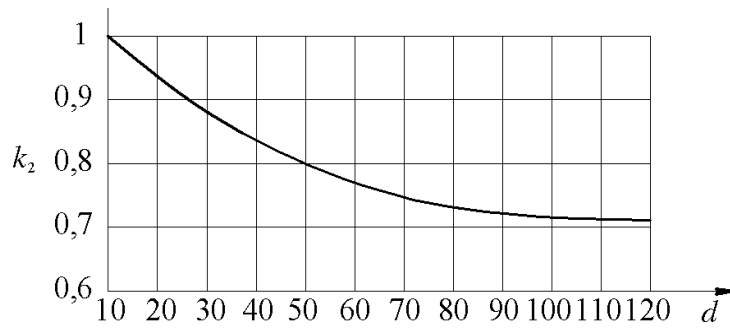

 Slika 6.12. Zarezna osjetljivost prema H. Neuberu [9] za uvijanje, $r = -1$

Koncentracija naprezanja je prvi značajan faktor koji treba uzeti u obzir pri određivanju dopuštenog naprezanja dinamički opterećenog strojnog dijela. Druga dva faktora koja treba uzeti u obzir u “uobičajenim” uvjetima pogona su utjecaj kvalitete ili stanja površine [16] k_1 i utjecaj veličine dijela [16] k_2 . Površina dijela određuje svojim zarezima uslijed obrade, brazdama i svim nepravilnostima koncentraciju naprezanja pri površini. Što je materijal čvršći, tim više je osjetljiv na površinsku geometriju, koju u nekim dijagramima karakterizirana dubinom brazde R_t , kako je prikazano na Slici 6.13.



Slika 6.13. Faktor površinske obrade [16]

Utjecaj veličine dijela je iskazan kroz mjere poprečni presjek. U dijagramu na Slici 6.14. na apscisi je prikazan parametar promjer d . To je vezano za upisani krug u presjek dijela, što naznačuje kolika je najmanja mjera presjeka. Što je poprečni presjek veći, to je dinamička čvrstoća manja.



Slika 6.14. Faktor veličine dijela [16]

Uzevši u obzir tri glavna utjecajna faktora na dinamičko naprezanje koje može podnijeti strojni dio, preostaje još faktor sigurnosti f_s , pa možemo postaviti jednadžbu dopuštenog dinamičkog naprezanja u materijalu strojnog dijela:

$$\sigma_{r,dop}^{d,x} = \sigma_r^{d,x} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}}, \quad (6.6)$$

6.6. Dimenzioniranje dinamički opterećenih strojnih dijelova

6.6.1. Proporcionalno opterećenje

Prilikom dimenzioniranja strojnih dijelova dinamički opterećenih, prvi korak je određivanje ciklusa naprezanja. Proporcionalno opterećenje predstavlja opterećenja strojnog dijela koji uzrokuju naprezanja za koja pravci glavnih naprezanja ne mijenjaju omjere niti smjer. U slučaju jednostavnih opterećenja, npr. samo osno opterećenje, samo savijanje, samo uvijanje, koja se mijenjaju u vremenu, kriterij dinamičke čvrstoće [7] se može prikazati prema:

$$\sigma_{\max} < \sigma_{r,dop}^{d,x}, \quad (6.7)$$

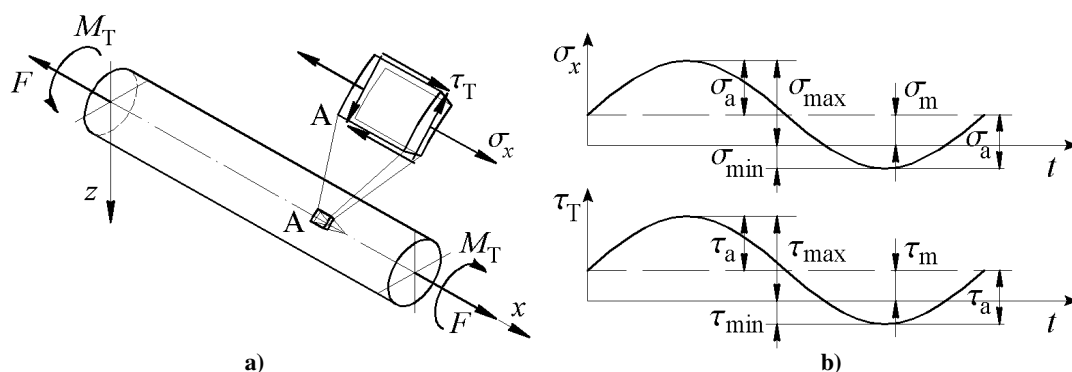
gdje je $\sigma_{\max}$ najveće naprezanje koje će se pojaviti u strojnom dijelu, $\sigma_{r,dop}^{d,x}$ dopušteno naprezanje u materijalu strojnog dijela za neki ciklus naprezanja karakteriziran veličinom r , za neku vrstu opterećenja x , koje može biti aksijalno, savijanje ili uvijanje.

Kao primjer složeno opterećenog dijela je prikazan proporcionalno opterećen štapić, na Slici 6.15. a). Štapić je opterećen uzdužnom silom i momentom uvijanja koji se mijenjaju na isti način, istom frekvencijom, u ovom primjeru prema zakonu sinusoide, prikazano kroz komponente naprezanja na Slici 6.15. b). Karakteristika ovakvog načina opterećivanja je da se pravci i omjeri glavnih naprezanja ne mijenjaju. Strojne dijelove dinamički proporcionalno opterećene dimenzioniramo provjerom kriterija čvrstoće u kritičnom presjeku, odnosno točki s najvećim opterećenjem, koncentracijom naprezanja, u kojoj je najveće naprezanje. Izračunava se ekvivalentna srednja vrijednost i ekvivalentna amplituda naprezanja prema nekoj od teorija čvrstoće, teoriji najvećeg posmičnog naprezanja ili teoriji najveće gustoće distorzijske energije, prema [16]:

$$\sigma_{a,ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2) \right]}. \quad (6.8)$$

$$\sigma_{m,ekv} = \sigma_{1,m} + \sigma_{2,m} + \sigma_{3,m} = \sigma_{x,m} + \sigma_{y,m} + \sigma_{z,m}.$$

U izrazu (6.8) oznaka “a” u indeksu komponente naprezanja znači amplituda te komponente, a indeks “m” srednja vrijednost. Dopušteno naprezanje u materijalu se za proračun dinamičke čvrstoće očitava iz najčešće shematiziranog Smithovog dijagrama. Tako očitavamo dopuštenu vrijednost za materijal, kada je površina polirana, ne postoji koncentracija naprezanja, strojni dio je debljine 10 mm, jer je tako provedeno ispitivanje. Dopušteno naprezanje za strojni dio se razlikuje od te vrijednosti jer strojni dio ima površinu koja može biti grublja, može imati veću debljinu od 10 mm, i može biti u nepovoljnim radnim uvjetima, primjerice agresivna atmosfera, povišena ili snižena temperatura, itd., što treba uzeti u obzir faktorima prema literaturi.



Slika 6.15. Štap proporcionalno opterećen: a) geometrija i opterećenje, b) komponente naprezanja

6.6.2. Neproporcionalno opterećenje

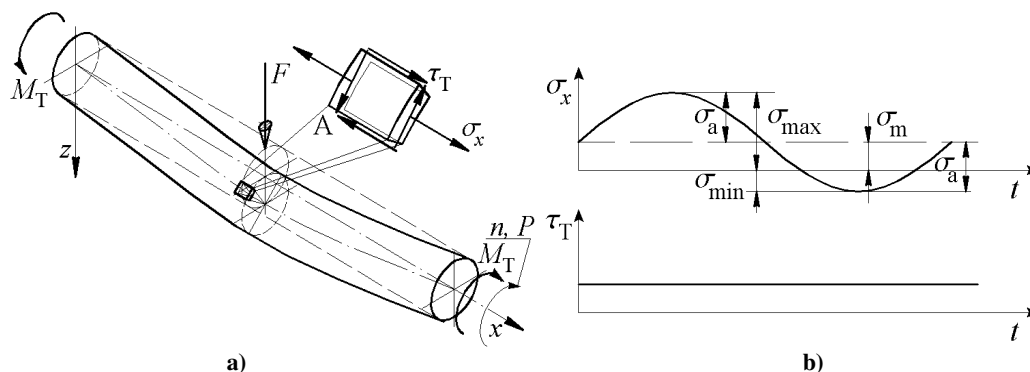
U slučaju kombiniranih opterećenja, npr. osno opterećenje i uvijanje, savijanje i uvijanje, naprezanje u nekoj točki materijala ima više komponenata koje se ne mijenjaju nužno na isti način istovremeno [9]. Vratilo koje je opterećeno poprečnim silama i prenosi snagu pri rotaciji je opterećeno na savijanje i uvijanje, prikazano na Slici 6.16. a). Ako rotira stalnom brzinom vrtnje komponenta naprezanja uslijed savijanja se mijenja prema zakonu sinusoide, dok je komponenta naprezanja uslijed uvijanja, uz pretpostavku stalne snage, tj. momenta uvijanja, konstantna, prikazano na Slici 6.16. b). Bitna karakteristika ovakvog načina opterećenja je da se komponente naprezanja mijenjaju na različite načine, različitim frekvencijama, a stoga se i pravci glavnih naprezanja mijenjaju u ciklusu naprezanja.

Kriterij dinamičke čvrstoće se može prikazati na više načina, prema različitim autorima. Neki od autora prema kojima se kriteriji čvrstoće nazivaju su Gerber, Goodman, Soderberg [9, 22, 29], itd. Temelj za određivanje kriterija čvrstoće jesu teorije čvrstoće prema kojima izračunavamo ekvivalentno naprezanje, a ovdje ekvivalentnu srednju vrijednost i amplitudu naprezanja, i uspoređujemo ih s graničnim vrijednostima zasebno za srednju vrijednost i amplitudu. Ekvivalentni amplituda i srednje naprezanje računaju se prema teoriji HMH na način:

$$\sigma_{a,ekv} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2} = \sqrt{\left(\frac{32\alpha_{k,ef}^s M_s^a}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16\alpha_{k,ef}^T M_T^a}{\pi d^3}\right)^2}, \quad (6.9)$$

$$\sigma_{m,ekv} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3\tau_m^2} = \sqrt{\left(\frac{32\alpha_{k,ef}^s M_s^m}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16\alpha_{k,ef}^T M_T^m}{\pi d^3}\right)^2}.$$

gdje su $\alpha_{k,ef}^s$ procijenjeni efektivni faktor koncentracije naprezanja za savijanje, M_s^a amplituda momenta savijanja, $\alpha_{k,ef}^T$ procijenjeni efektivni faktor koncentracije naprezanja za uvijanje, M_T^a amplituda momenta uvijanja, M_s^m srednja vrijednost momenta savijanja i M_T^m srednja vrijednost momenta uvijanja.



Slika 6.16. Štap neproporcionalno opterećen: a) geometrija i opterećenje, b) komponente naprezanja

Izvođenje jednadžbe za izračun promjera na osnovi opterećenja je temeljen na izračunu faktora sigurnosti f_s , koji različiti autori računaju različito, odnosno, prema različitim vrijednostima karakterističnim za materijal. Ovdje će biti uzeta i prikazana samo najkonzervativnija teorija prema Soderbergu, za koju lom ispitnog uzorka (bez prethodne pojave plastičnog tečenja) nastupa ako je postignut uvjet:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}^d} + \frac{\sigma_m}{\sigma_e} = 1. \quad (6.10)$$

Zamjenjujući komponente naprezanja ekvivalentnim komponentama, faktor sigurnosti f_s se računa prema:

$$\frac{\sigma_{a,ekv}}{\sigma_{-1}^d} + \frac{\sigma_{m,ekv}}{\sigma_e} = \frac{1}{f_s}. \quad (6.11)$$

Uvrštavanjem (6.9) u (6.11) i preuređivanjem, dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{-1}^d} \sqrt{\left(\frac{32\alpha_{k,ef}^s M_s^a}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16\alpha_{k,ef}^T M_T^a}{\pi d^3}\right)^2} + \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\left(\frac{32\alpha_{k,ef}^s M_s^m}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{16\alpha_{k,ef}^T M_T^m}{\pi d^3}\right)^2} &= \frac{1}{f_s} \\ \frac{16}{\pi d^3} \left\{ \frac{1}{\sigma_{-1}^d} \sqrt{4(\alpha_{k,ef}^s M_s^a)^2 + 3(\alpha_{k,ef}^T M_T^a)^2} + \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{4(\alpha_{k,ef}^s M_s^m)^2 + 3(\alpha_{k,ef}^T M_T^m)^2} \right\} &= \frac{1}{f_s} \\ d = \sqrt[3]{\frac{16f_s}{\pi} \left\{ \frac{1}{\sigma_{-1}^d} \sqrt{4(\alpha_{k,ef}^s M_s^a)^2 + 3(\alpha_{k,ef}^T M_T^a)^2} + \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{4(\alpha_{k,ef}^s M_s^m)^2 + 3(\alpha_{k,ef}^T M_T^m)^2} \right\}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Za česti slučaj opterećenja vratila pri čemu je naprezanje uslijed savijanja sinusoidalno, tj. možemo pisati da moment savijanja ima $M_s^a = M_s$, $M_s^m = 0$, a moment uvijanja stalan i vrijedi $M_T^a = 0$ i $M_T^m = M_T$, neki članovi u (6.12) izostaju pa dobivamo:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16f_s}{\pi} \left\{ \frac{2\alpha_{k,ef}^s M_s}{\sigma_{-1}^d} + \frac{\alpha_{k,ef}^T M_T}{\sigma_e} \sqrt{3} \right\}}. \quad (6.13)$$

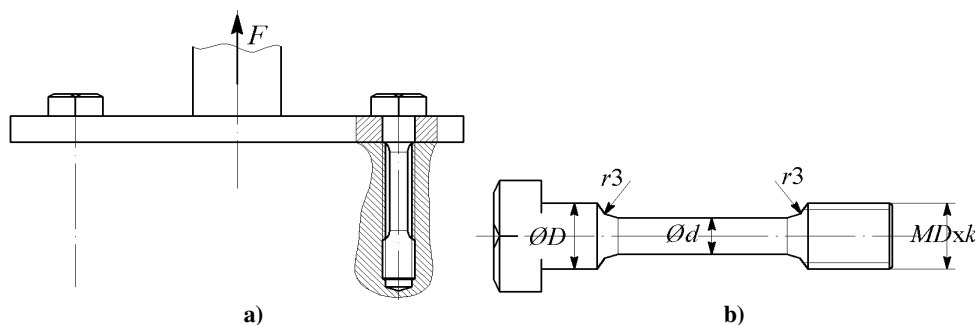
Budući da u Soderbergovom kriteriju nije eksplicitno izračunavano dopušteno naprezanje kao u (6.6) u kojem su uvršteni faktori utjecaja kvalitete površine i veličine dijela, koji oba smanjuju dopušteno naprezanje, ili drugačije gledano, smanjuju mogućnost nošenja strojnog dijela, treba ih uzeti u obzir u jednadžbi (6.13). Dopunjen Soderbergov kriterij je oblika:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16f_s}{k_1 k_2 \pi} \left\{ \frac{2\alpha_{k,ef}^s M_s}{\sigma_{-1}^d} + \frac{\alpha_{k,ef}^T M_T}{\sigma_e} \sqrt{3} \right\}}. \quad (6.14)$$

Primjer 6.1. Vijci opterećeni aksijalno.

Ploča prema Slici 6.17. a) koja je spojena sa 6 jednoliko raspodijeljenih vijaka za nepomičnu okolinu, opterećena je dinamičkom silom. Vijci su načinjeni od materijala koji ima oznaku 12.9, a kritični dio geometrije je obrađen s $R_t = 8 \mu\text{m}$, Slika 6.17. b). Poznata je dinamička čvrstoća materijala za simetričan ciklus pri savijanju. Potrebno je odrediti promjer struka vijaka ϕd . Vijci imaju na krajevima fini metrički navoj $MD \times k$. Zadano:

$$F(t) = F_m + F_a \sin[\Omega t], F_m = 18000 \text{ N}, F_a = 8000 \text{ N}, \sigma_{-1}^{d,s} = 480 \text{ MPa}, f_s = 1,5, D \approx 1,5d.$$



Slika 6.17. Ploča spojena vijcima za okolinu opterećena dinamičkom silom:
a) geometrija i opterećenje, b) geometrija vijka

Zarezo djelovanje na prijelazu sa struka vijka (ϕd) na navoj ili na cilindrični dosjedni dio (ϕD) je mjesto najvećeg vršnog naprezanja. Kao zadano slikom je najveći prijelazni radijus $r = 3$ mm. Faktor koncentracije naprezanja ćemo odrediti pomoću teorijskog faktora koncentracije naprezanja iz dijagrama na Slici A.1. i faktora zarezne osjetljivosti iz dijagrama na Slici 6.11. Iz Slike A.1. možemo očitati za pretpostavljenu geometriju $D/d \approx 1,5$, $r/d \approx 3/6 = 0,5$ (prvi korak iteracije, pokušaj – pogreška) da te vrijednosti izlaze iz prikazanog područja, pa ćemo za najbliže parametre uzeti da je:

$$\alpha_{k,t}^1 \approx 1,45, q = 0,95. \quad (6.15)$$

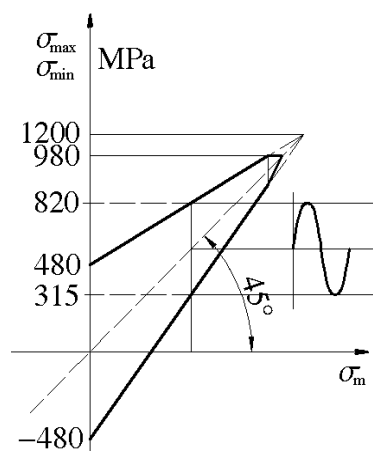
Efektivni faktor koncentracije naprezanja je nadalje prema (6.3):

$$\alpha_{k,ef}^1 \approx 1 + 0,95(1,45 - 1) = 1,43. \quad (6.16)$$

Ostala dva utjecajna parametra su faktor kvalitete površine, koji je prema dijagramu sa Slike 6.13. $k_1 \approx 0,79$. U prvom koraku izračuna promjera struka vijka pretpostavljamo da će promjer struka vijka biti oko 10 mm, što znači da je promjer dosjednog dijela D oko 15 mm, za koji je faktor veličine dijela k_2 , sa Slike 6.14. oko 0,95. Materijal vijka je jednostavno opterećen i napregnut, s ciklusom naprezanja karakteristike:

$$\sigma \sim F \rightarrow r = \frac{F_{\min}}{F_{\max}} = \frac{18000 - 8000}{18000 + 8000} = \frac{10000}{26000} \approx 0,385 \quad (6.17)$$

Budući da su poznati samo osnovni podaci o dinamičkoj čvrstoći materijala vijka, potrebno je konstruirati shematiziran Smithov dijagram. U oznaci čelika za vijke oblika $x.y$ je prvi broj, x , statička čvrstoća podijeljena sa 100, a drugi broj, y , označava omjer granice elastičnosti i čvrstoće [11], što znači da ovaj čelik ima statička svojstva $\sigma_M = 1200$ MPa, $\sigma_e = 0,9 \cdot 1200 = 980$ MPa. Shematiziran Smithov dijagram za taj materijal je prikazan na Slici 6.18.



Slika 6.18. Shematiziran Smithov dijagram za čelik za vijke 12.9

Iz dijagrama na Slici 6.16. vidljivo je da je najveće naprezanje koje taj materijal može pri tom ciklusu izdržati oko $\sigma_{0,385}^{d,a} \approx 820$ MPa. Dopušteno naprezanje ćemo izračunati prema (6.6):

$$\sigma_{0,385,dop}^{d,a} = \sigma_{0,385}^{d,a} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}} = 820 \frac{0,79 \cdot 0,95}{1,5 \cdot 1,43} = 287 \text{ MPa.} \quad (6.18)$$

Promjer struka vijka je prema (6.7):

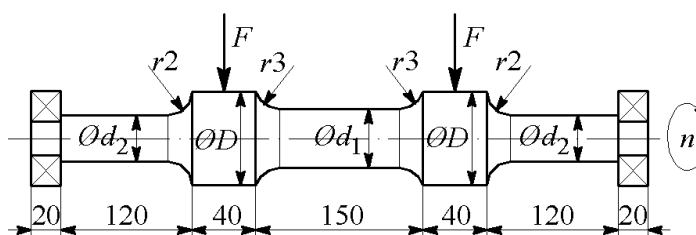
$$\sigma_{\max} = \frac{4F_{\max}}{6\pi d^2} \leq \sigma_{0,385,dop}^{d,a} \Rightarrow \frac{4 \cdot 26000}{6\pi 287} = d^2 \rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot 26000}{6\pi 287}} = 4,39 \text{ mm.} \quad (6.19)$$

Izračunavajući promjer navoja prema zadanoj Slici 6.17. b) $D = 1,5d = 1,5 \cdot 4,39 = 6,6 \text{ mm}$, možemo zaključiti da možemo odabrati promjer navoja $D = 8 \text{ mm}$, jer je fini metrički navoj prvog reda prioriteta prema [11] M8x1, promjera jezgre $d_3 \approx 6,8 \text{ mm}$. Za odabrani navoj promjera 8 mm, promjer struka je $d = 0,666 \cdot 8 = 5,3 \text{ mm}$, što možemo zaokružiti na $d = 5,3 \text{ mm}$. Ova je vrijednost vrlo bliska pretpostavljenoj za promjer struka, za koju su izračunati faktori koncentracije naprezanja i veličine dijela, pa stoga možemo zadržati odabrani promjer struka, jer je ionako povećan prema računski minimalnom.

Prema [11] za prijelazni radijus r veći od promjera struka (ϕd) može se uzeti da je koncentracija naprezanja praktično iščezla, pa kada bi takav prijelazni radijus bio izrađen, vrijedilo bi da je $\alpha_{k,t}, \alpha_{k,ef} = 1$.

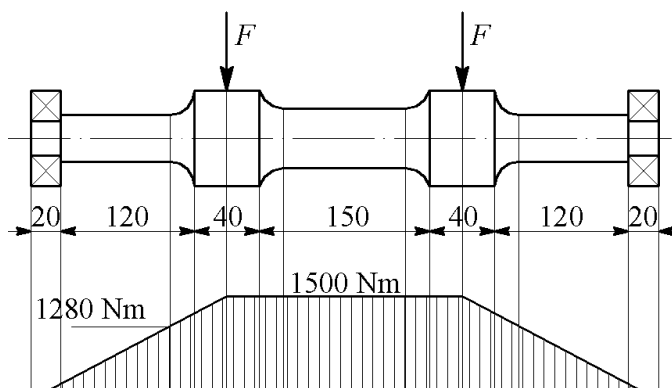
Primjer 6.2. Osovina opterećena stalnim silama.

Osovina prema Slici 6.19. koja rotira oslonjena na dva ležaja, opterećena je stalnim silama. Materijal osovine je St42, a kritični dio geometrije je obrađen s $R_t = 6 \mu\text{m}$. Poznata je dinamička čvrstoća materijala za simetričan ciklus pri savijanju. Potrebno je odrediti promjere osovine d_1, d_2, D , ako vrijedi da je $d_1 = 0,8D, d_2 = 0,7D$. Zadano: $F = 10000 \text{ N}$, $\sigma_{-1}^{d,s} = 170 \text{ MPa}$, $\sigma_M = 420 \text{ MPa}$, $f_s = 1,5$.



Slika 6.19. Osovina na dva ležaja opterećena silama

Sile F savijaju osovinu i osovina tako savijena rotira. Naprezanje u materijalu se mijenja prema zakonu sinusoide, i samo je jedna značajna komponenta naprezanja različita od nule. Srednja vrijednost naprezanja je 0, a amplituda naprezanja je određena jednadžbom $\sigma_a = M_s / W_y$. Mjerodavno svojstvo materijala za dimenzioniranje osovine je dinamička čvrstoća $\sigma_{-1}^{d,s}$. Osovina je simetričan nosač, te su kritična dva presjeka, prvi je prijelaz sa d_2 na D , a drugi prijelaz sa d_1 na D . Prvi korak u dimenzioniranju je izračunati i nacrtati dijagram momenta savijanja, prikazan na Slici 6.20.



Slika 6.20. Dijagram momenta savijanja osovine

Faktor koncentracije naprezanja ćemo odrediti pomoću teorijskog faktora koncentracije naprezanja iz dijagrama na Slici A.3. i faktora zarezne osjetljivosti iz dijagrama na Slici 6.11. Iz Slike A.3. možemo očitati

za pretpostavljenu geometriju $D/d_1 = 1,25$, $r/d_1 \approx 3/30 = 0,1$, $D/d_2 = 1,43$, $r/d_2 \approx 2/35 = 0,06$ (prvi korak iteracije, pokušaj – pogreška):

$$\alpha_{k,t}^1 \approx 1,6 (d_1), q = 0,72; \alpha_{k,t}^1 \approx 1,95 (d_2), q = 0,77. \quad (6.20)$$

Efektivni faktor koncentracije naprezanja je nadalje prema (6.3):

$$\alpha_{k,ef}^1 \approx 1 + 0,72(1,6 - 1) = 1,43 (d_1); \alpha_{k,ef}^1 \approx 1 + 0,77(1,95 - 1) = 1,73 (d_2). \quad (6.21)$$

Ostala dva utjecajna parametra su faktor kvalitete površine, koji je prema dijagramu sa Slike 6.13. $k_1 \approx 0,92$. U prvom koraku pretpostavljamo da će promjer D biti oko 40 mm, i da će osovina biti izrađena obradom odvajanja čestica, prvenstveno tokarenjem iz takvog poluproizvoda šipke, što znači da je to mjerodavan promjer za cijelu osovinu, za koji je faktor veličine dijela k_2 , sa Slike 6.14. oko 0,85. Dopušteno naprezanje ćemo izračunati prema (6.6):

$$\begin{aligned} \sigma_{-1,dop}^{d,s} &= \sigma_{-1}^{d,s} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}} = 170 \frac{0,92 \cdot 0,85}{1,5 \cdot 1,43} = 62 \text{ MPa } (d_1). \\ \sigma_{-1,dop}^{d,s} &= \sigma_{-1}^{d,s} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}} = 170 \frac{0,92 \cdot 0,85}{1,5 \cdot 1,73} = 51,2 \text{ MPa } (d_2). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Promjer osovine je prema (6.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{32M_s}{\pi d^3} \leq \sigma_{-1,dop}^{d,s} \Rightarrow \frac{32 \cdot 1500 \cdot 10^3}{\pi 62} = d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1500 \cdot 10^3}{\pi 62}} = 62,7 \text{ mm } (d_1). \\ d &= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1280 \cdot 10^3}{\pi 51,2}} = 63,4 \text{ mm } (d_2). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Iz rješenja prvog koraka iteracije vidljivo je da je početna pretpostavka o veličini promjera značajno različita od izračunatog, što znači da treba provesti drugi korak iteracije s izmijenjenim vrijednostima za promjere prema izračunatima iz prvog koraka, jer će se promjenom pretpostavljenih promjera promijeniti i faktori koncentracije naprezanja, prema većim vrijednostima, a dopušteno naprezanje biti manje. Za drugi korak iteracije je pretpostavka da je promjer poluproizvoda $D = 100$ mm pa su teorijski faktor koncentracije naprezanja iz Slike A.3. možemo očitati za pretpostavljenu geometriju $D/d_1 = 1,25$, $r/d_1 \approx 3/80 = 0,038$, $D/d_2 = 1,43$, $r/d_2 \approx 2/70 = 0,028$.

$$\alpha_{k,t}^1 \approx 2,15 (d_1), q = 0,72; \alpha_{k,t}^1 \approx 2,45 (d_2), q = 0,77. \quad (6.24)$$

Efektivni faktor koncentracije naprezanja je nadalje prema (6.3):

$$\alpha_{k,ef}^1 \approx 1 + 0,72(2,15 - 1) = 1,83 (d_1); \alpha_{k,ef}^1 \approx 1 + 0,77(2,45 - 1) = 2,12 (d_2). \quad (6.25)$$

Faktor veličine dijela k_2 , sa Slike 6.14. je oko 0,72. Dopušteno naprezanje ćemo izračunati prema (6.6):

$$\begin{aligned} \sigma_{-1,dop}^{d,s} &= \sigma_{-1}^{d,s} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}} = 170 \frac{0,92 \cdot 0,72}{1,5 \cdot 1,83} = 41 \text{ MPa } (d_1). \\ \sigma_{-1,dop}^{d,s} &= \sigma_{-1}^{d,s} \frac{k_1 k_2}{f_s \alpha_{k,ef}} = 170 \frac{0,92 \cdot 0,72}{1,5 \cdot 2,11} = 35,6 \text{ MPa } (d_2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Promjer osovine je prema (6.7):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{32M_s}{\pi d^3} \leq \sigma_{-1,dop}^{d,s} \Rightarrow \frac{32 \cdot 1500 \cdot 10^3}{\pi 41} = d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1500 \cdot 10^3}{\pi 41}} = 72 \text{ mm } (d_1). \\ d &= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1280 \cdot 10^3}{\pi 35,6}} = 71,5 \text{ mm } (d_2). \end{aligned} \quad (6.27)$$

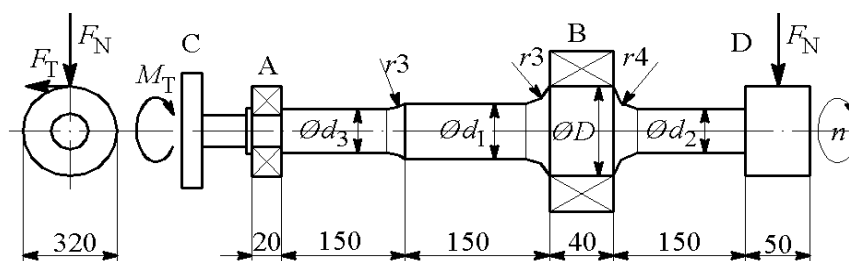
Sada možemo izračunati promjer dosjednog dijela osovine, prema d_1 dobivamo $D = d_1 / 0,8 = 72 / 0,8 = 90 \text{ mm}$, a prema d_2 dobivamo $D = d_2 / 0,7 = 71,5 / 0,7 = 102 \text{ mm}$, što je vrlo blisko pretpostavljenoj vrijednosti $D = 100 \text{ mm}$.

Bitno je istaknuti da je potrebno provesti provjeru zadovoljavanja kriterija čvrstoće nakon ovakvog zaokruživanja rezultata. U ovakvim primjerima više je utjecajnih veličina koje nelinearno ovise o promjeru, tj. geometriji, a i njihova kombinacija nije nužno linearna, pa mogu nastati značajne promjene u naprezanju malom promjenom geometrije. Treba istaknuti i da su vrijednosti za faktore koncentracije naprezanja, veličine dijela i kvalitete površine očitani iz relativno malih dijagrama, te je greška očitavanja ili razlučivosti veća od oko 5%. Stoga treba i rješenja promatrati u tom svjetlu.

Primjer 6.3. Vratilo opterećeno na savijanje i uvijanje.

Vratilo prema Slici 6.21. prenosi snagu od prirubnice C do tarenice D oslonjena na dva ležaja, A i B. Materijal vratila je St60, a kritični dio geometrije je obrađen s $R_t = 6 \mu\text{m}$. Poznata je dinamička čvrstoća materijala za simetričan ciklus pri savijanju. Potrebno je odrediti promjere vratila d_1, d_2, D , ako vrijedi da je $d_1 = 0,8D, d_2 = 0,75D$. Zadano:

$$M_T = 150 \text{ Nm}, \sigma_{-1}^{d,s} = 280 \text{ MPa}, \sigma_e = 440 \text{ MPa}, \sigma_M = 600 \text{ MPa}, f_s = 1,5, \mu = 0,06.$$

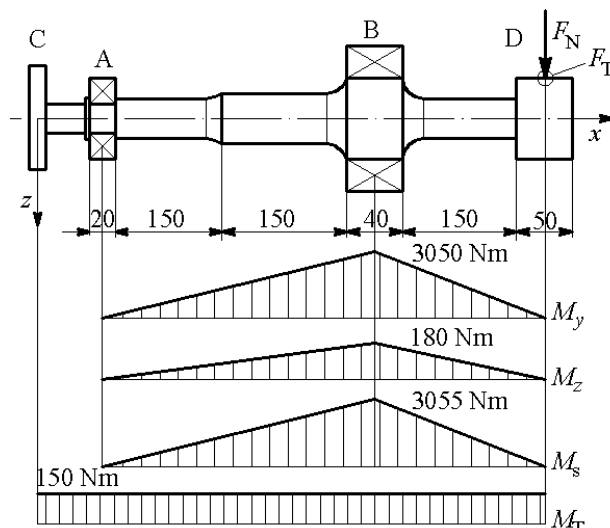


Slika 6.21. Vratilo s prirubnicom i tarenicom

Vratilo prenosi snagu, pri pretpostavljeno stalnoj brzini vrtnje, što znači da moment uvijanja na prirubnici C uravnotežuje moment uvijanja sile trenja na tarenici D, i stalne je vrijednosti i smjera. Iz poznate geometrije tarenice možemo izračunati potrebnu silu pritiska na tarenicu:

$$\begin{aligned} F_T \cdot 0,160 &= M_T \rightarrow F_T = M_T / 0,160 = 150 / 0,16 = 937,5 \text{ N.} \\ F_T &= F_N \mu \rightarrow F_N = F_T / \mu = 937,5 / 0,06 = 15625 \text{ N.} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Iz poznatih sila možemo izračunati moment savijanja u pojedinom presjeku vratila, kako je prikazano na Slici 6.22. Normalna i tangencijalna sila savijaju vratilo i ono takvo rotira. Vidljivo je sa Slike 6.22. da je moment savijanja tangencijalne sile na tarenici zanemarivo mali prema momentu savijanja normalne sile, stoga se u općem slučaju može zanemariti.



Slika 6.22. Momenti savijanja i uvijanja za vratilo

Naprezanje uslijed savijanja u materijalu se mijenja prema zakonu sinusoide, dok je naprezanje uslijed uvijanja stalno, stoga za proračun vrijedi $M_s^a = M_s$, $M_s^m = 0$, $M_T^a = 0$ i $M_T^m = M_T$. Mjerodavna svojstva materijala za dimenzioniranje vratila su dinamička čvrstoća $\sigma_{-1}^{d,s}$ i granica elastičnosti σ_e . Iz dijagrama momenta savijanja se sa Slike 6.22. za kritične presjeke može očitati $M_s \approx 2742 \text{ Nm}$. Faktor koncentracije naprezanja ćemo odrediti pomoću teorijskog faktora koncentracije naprezanja iz dijagrama na Slici A.3. i faktora zarezne osjetljivosti iz dijagrama na Slici 6.11. Iz Slike A.3. možemo očitati za pretpostavljenu geometriju $D/d_1 = 1,25$, $r/d_1 \approx 3/60 = 0,05$, $D/d_2 = 1,333$, $r/d_2 \approx 4/56 = 0,07$ (prvi korak iteracije, pokušaj – pogreška):

$$\begin{aligned}\alpha_{k,t}^s &\approx 1,95(d_1), q^s = 0,83; \alpha_{k,t}^s \approx 1,8(d_2), q^s = 0,84. \\ \alpha_{k,t}^T &\approx 1,63(d_1), q^T = 0,95; \alpha_{k,t}^T \approx 1,57(d_2), q^T = 0,95.\end{aligned}\quad (6.29)$$

Efektivni faktor koncentracije naprezanja je nadalje prema (6.3):

$$\begin{aligned}\alpha_{k,ef}^s &\approx 1 + 0,83(1,95 - 1) = 1,79(d_1); \alpha_{k,ef}^s \approx 1 + 0,84(1,8 - 1) = 1,67(d_2). \\ \alpha_{k,ef}^T &\approx 1 + 0,95(1,63 - 1) = 1,6(d_1); \alpha_{k,ef}^T \approx 1 + 0,95(1,57 - 1) = 1,54(d_2).\end{aligned}\quad (6.30)$$

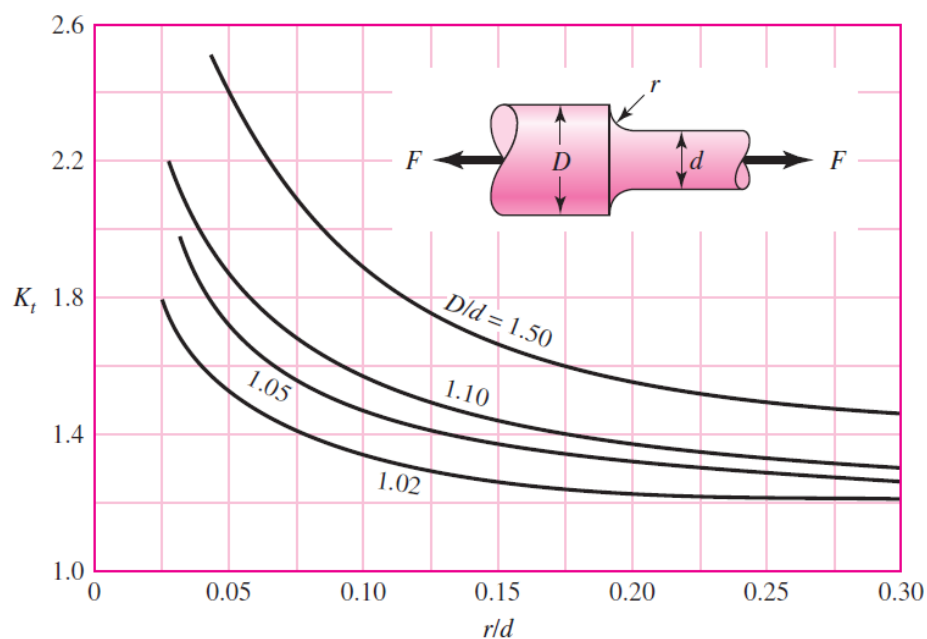
Ostala dva utjecajna parametra su faktor kvalitete površine, koji je prema dijagramu sa Slike 6.13. $k_1 \approx 0,89$. Faktor veličine dijela k_2 , sa Slike 6.14. je oko 0,74. Dimenzioniranje ćemo provesti prema Sodebergovom kriteriju opisanom u (6.14):

$$\begin{aligned}d_1 &= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5}{0,89 \cdot 0,74\pi} \left\{ \frac{2 \cdot 1,79 \cdot 3055 \cdot 10^3}{280} + \frac{1,6 \cdot 150 \cdot 10^3}{440} \sqrt{3} \right\}} = 77,3 \text{ mm}. \\ d_2 &= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,5}{0,89 \cdot 0,74\pi} \left\{ \frac{2 \cdot 1,67 \cdot 3055 \cdot 10^3}{280} + \frac{1,54 \cdot 150 \cdot 10^3}{440} \sqrt{3} \right\}} = 75,7 \text{ mm}.\end{aligned}\quad (6.31)$$

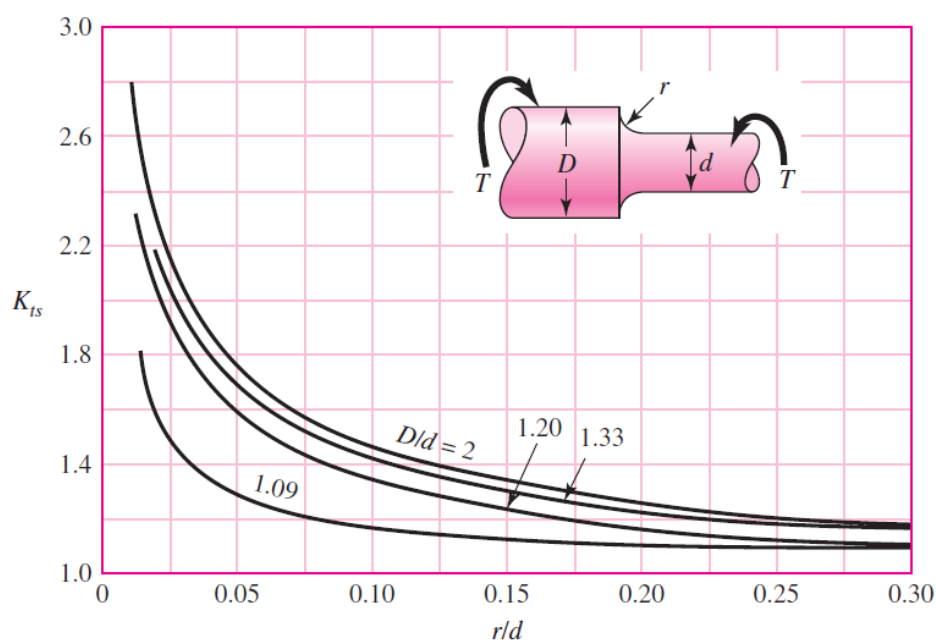
Promjer D dobivamo prema iz zadanih omjera u tekstu zadatka, pa je veća od te dvije vrijednosti $D = 101 \text{ mm}$, što je u skladu s pretpostavkom prema kojoj su izračunati faktori.

Dodatak A

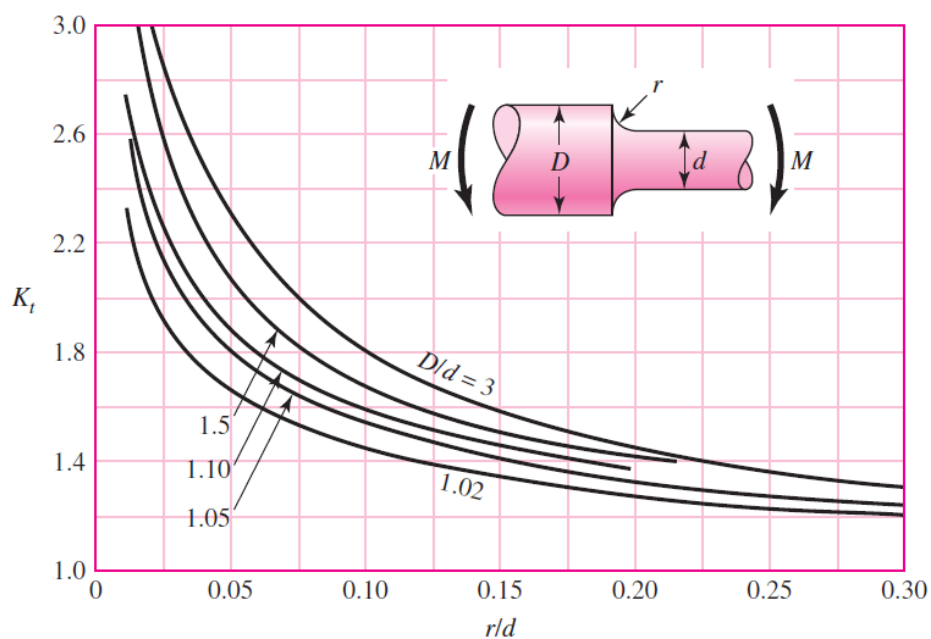
Dijagrami faktora koncentracije naprezanja za različita opterećenja



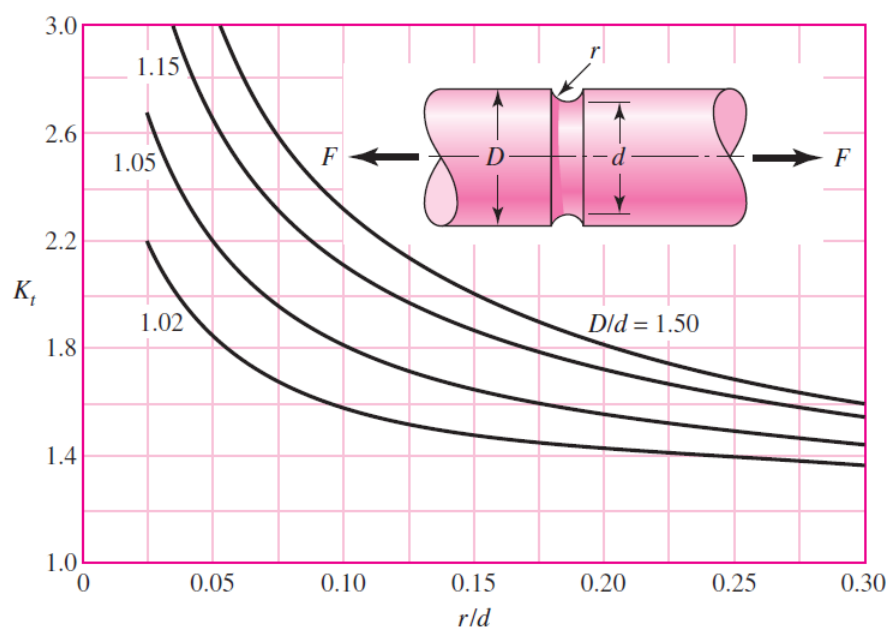
Slika A. 1. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri rastezanju



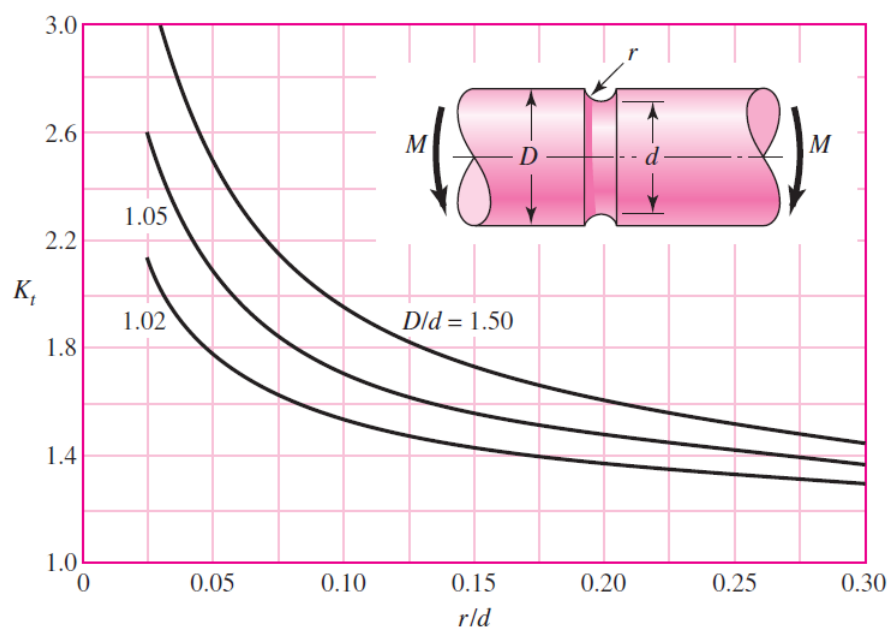
Slika A. 2. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri uvijanju



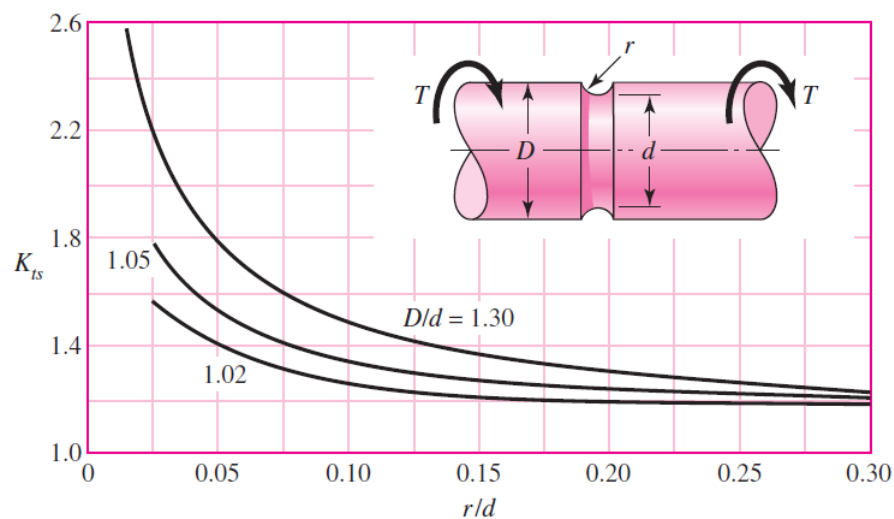
Slika A. 3. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri savijanju



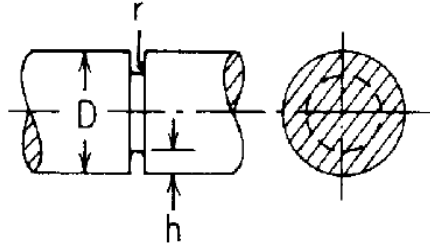
Slika A. 4. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri rastezanju



Slika A. 5. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri savijanju



Slika A. 6. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri uvijanju



$$\sigma_{\max} = K_t \frac{4P}{\pi(D-2h)^2} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where

	$0.25 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 50.0$
C_1	$0.455 + 3.354\sqrt{h/r} - 0.769h/r$	$0.935 + 1.922\sqrt{h/r} + 0.004h/r$
C_2	$3.129 - 15.955\sqrt{h/r} + 7.404h/r$	$0.537 - 3.708\sqrt{h/r} + 0.040h/r$
C_3	$-6.909 + 29.286\sqrt{h/r} - 16.104h/r$	$-2.538 + 3.438\sqrt{h/r} - 0.012h/r$
C_4	$4.325 - 16.685\sqrt{h/r} + 9.469h/r$	$2.066 - 1.652\sqrt{h/r} - 0.031h/r$

For the semicircular notch ($h/r = 1$)

$$K_t = 3.04 - 5.42 \left(\frac{2h}{D} \right) + 6.27 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 - 2.89 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

a)

$$\sigma_{\max} = K_t \frac{32M}{\pi(D-2h)^3} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where

	$0.25 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 50.0$
C_1	$0.455 + 3.354\sqrt{h/r} - 0.769h/r$	$0.935 + 1.922\sqrt{h/r} + 0.004h/r$
C_2	$0.891 - 12.721\sqrt{h/r} + 4.593h/r$	$-0.552 - 5.327\sqrt{h/r} + 0.086h/r$
C_3	$0.286 + 15.481\sqrt{h/r} - 6.392h/r$	$0.754 + 6.281\sqrt{h/r} - 0.121h/r$
C_4	$-0.632 - 6.115\sqrt{h/r} + 2.568h/r$	$-0.138 - 2.876\sqrt{h/r} + 0.031h/r$

For the semicircular notch ($h/r = 1$)

$$K_t = 3.04 - 7.236 \left(\frac{2h}{D} \right) + 9.375 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 - 4.179 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

b)

$$\sigma_{\max} = K_t \frac{16T}{\pi(D-2h)^3} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where

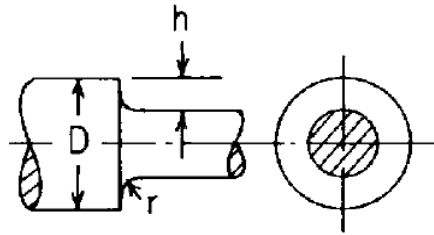
	$0.25 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 50.0$
C_1	$1.245 + 0.264\sqrt{h/r} + 0.491h/r$	$1.651 + 0.614\sqrt{h/r} + 0.040h/r$
C_2	$-3.030 + 3.269\sqrt{h/r} - 3.633h/r$	$-4.794 - 0.314\sqrt{h/r} - 0.217h/r$
C_3	$7.199 - 11.286\sqrt{h/r} + 8.318h/r$	$8.457 - 0.962\sqrt{h/r} + 0.389h/r$
C_4	$-4.414 + 7.753\sqrt{h/r} - 5.176h/r$	$-4.314 + 0.662\sqrt{h/r} - 0.212h/r$

For the semicircular notch ($h/r = 1$)

$$K_t = 2.000 - 3.394 \left(\frac{2h}{D} \right) + 4.231 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 - 1.837 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

c)

Slika A. 7. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [29] za usjek u štapu: a) rastezanje, b) savijanje, c) uvijanje



$$\sigma_{\max} = K_t \frac{4P}{\pi(D-2h)^2} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where

	$0.25 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 20.0$
C_1	$0.927 + 1.149\sqrt{h/r} - 0.086h/r$	$1.225 + 0.831\sqrt{h/r} - 0.010h/r$
C_2	$0.011 - 3.029\sqrt{h/r} + 0.948h/r$	$-1.831 - 0.318\sqrt{h/r} - 0.049h/r$
C_3	$-0.304 + 3.979\sqrt{h/r} - 1.737h/r$	$2.236 - 0.522\sqrt{h/r} + 0.176h/r$
C_4	$0.366 - 2.098\sqrt{h/r} + 0.875h/r$	$-0.630 + 0.009\sqrt{h/r} - 0.117h/r$

a)

$$\sigma_{\max} = K_t \frac{32M}{\pi(D-2h)^3} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where

	$0.25 \leq h/r \leq 2.0$	$2.0 \leq h/r \leq 20.0$
C_1	$0.927 + 1.149\sqrt{h/r} - 0.086h/r$	$1.225 + 0.831\sqrt{h/r} - 0.010h/r$
C_2	$0.015 - 3.281\sqrt{h/r} + 0.837h/r$	$-3.790 + 0.958\sqrt{h/r} - 0.257h/r$
C_3	$0.847 + 1.716\sqrt{h/r} - 0.506h/r$	$7.374 - 4.834\sqrt{h/r} + 0.862h/r$
C_4	$-0.790 + 0.417\sqrt{h/r} - 0.246h/r$	$-3.809 + 3.046\sqrt{h/r} - 0.595h/r$

b)

$$\sigma_{\max} = K_t \frac{16T}{\pi(D-2h)^3} \text{ where } K_t = C_1 + C_2 \left(\frac{2h}{D} \right) + C_3 \left(\frac{2h}{D} \right)^2 + C_4 \left(\frac{2h}{D} \right)^3$$

where for $0.25 \leq h/r \leq 4.0$

$$C_1 = 0.953 + 0.680\sqrt{h/r} - 0.053h/r$$

$$C_2 = -0.493 - 1.820\sqrt{h/r} + 0.517h/r$$

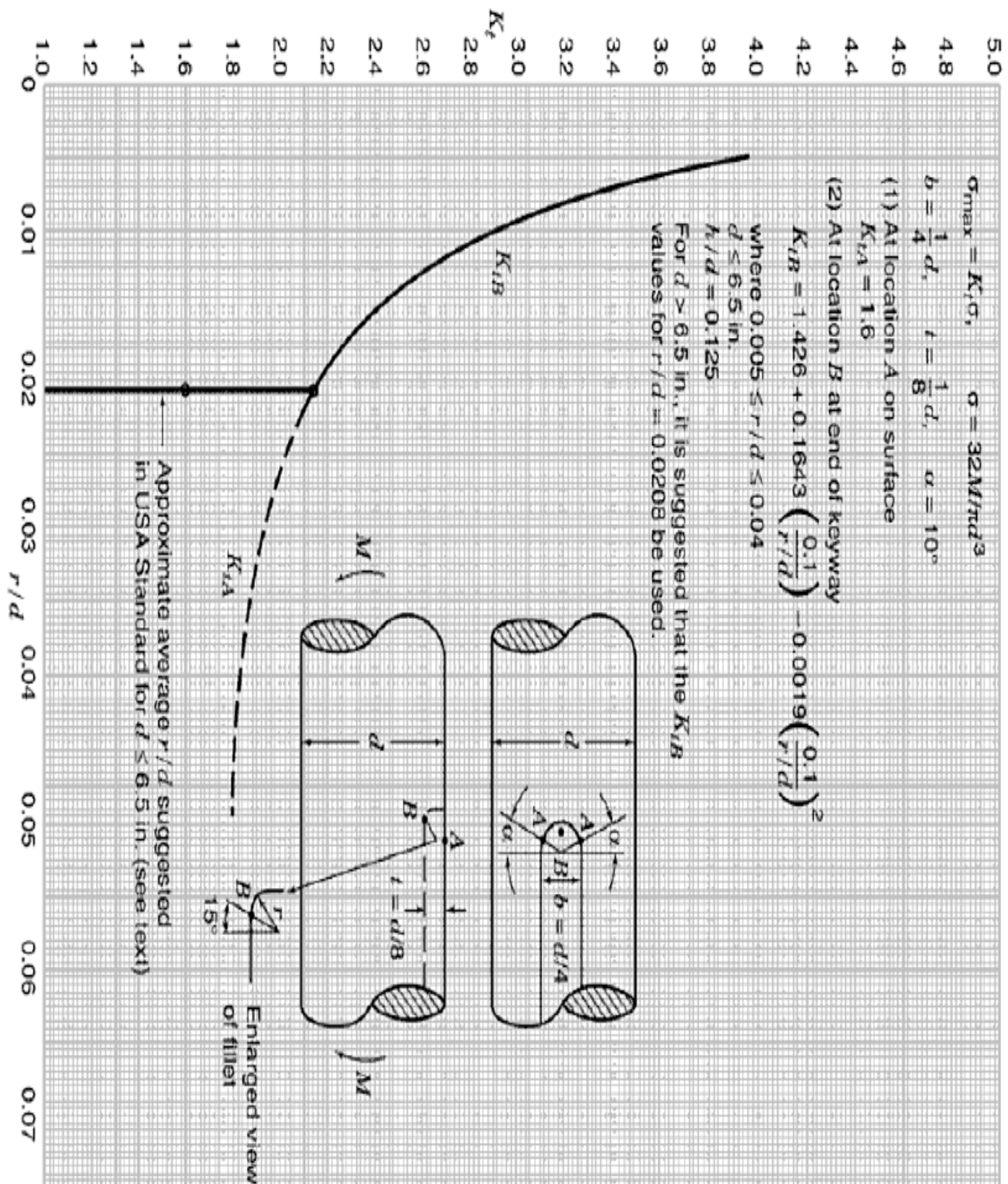
$$C_3 = 1.621 + 0.908\sqrt{h/r} - 0.529h/r$$

$$C_4 = -1.081 + 0.232\sqrt{h/r} + 0.065h/r$$

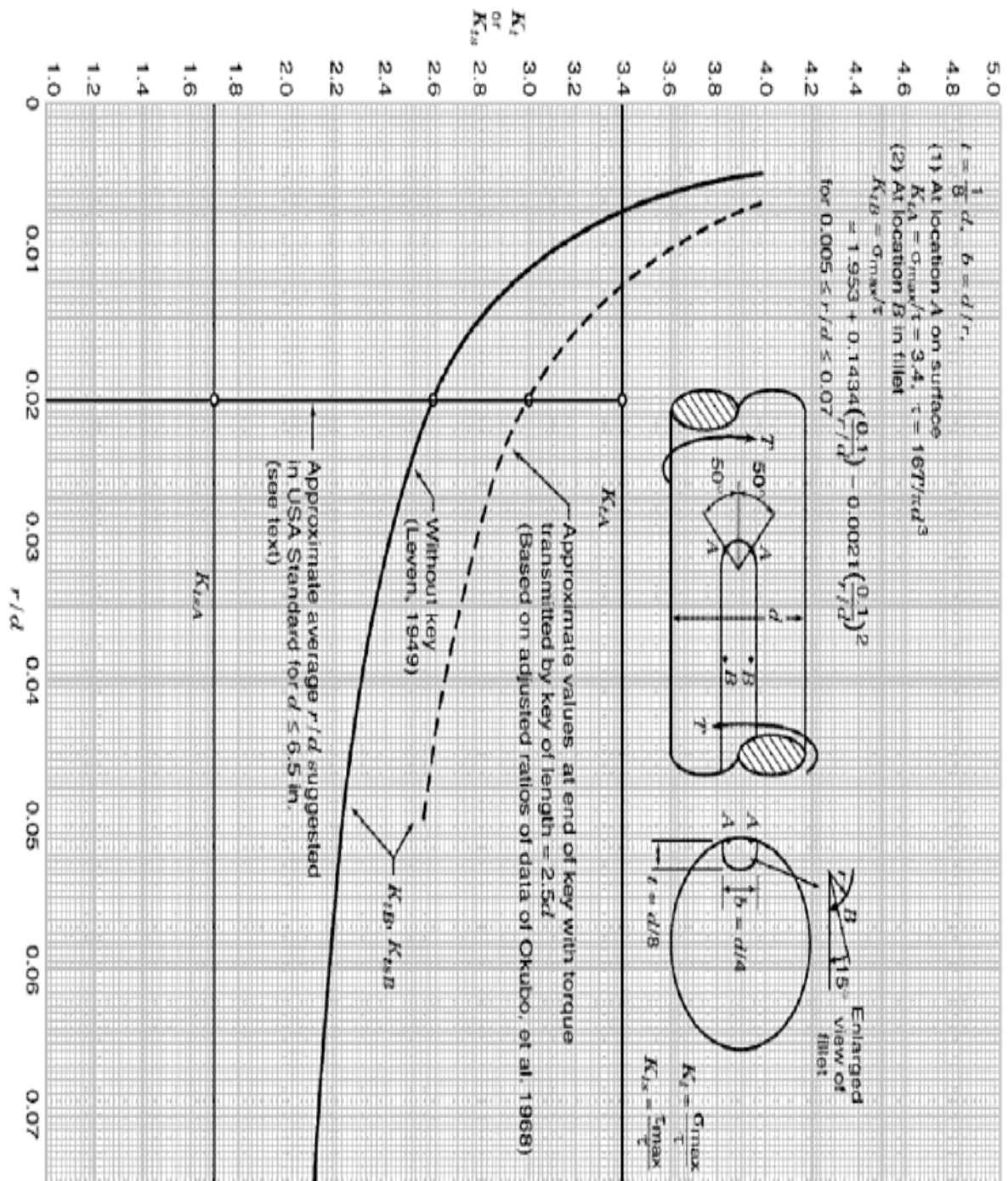
c)

Slika A. 8. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [29] za prijelaz promjera štapa:

a) rastezanje, b) savijanje, c) uvijanje

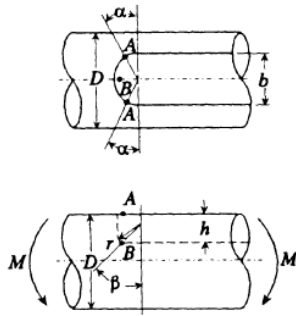


Slika A. 9. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani polukružni utor na okruglom vratilu pri savijanju



Slika A. 10. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani polukružni utor na okruglom vratilu pri uvijanju

a. Bending



$$\sigma_{\max} = K_t \sigma, \quad \sigma = 32M/\pi D^3$$

$$b = \frac{1}{4}D, \quad h = \frac{1}{8}D, \quad \alpha = 10^\circ, \quad \beta = 15^\circ$$

(1) At location A on surface:

$$K_{tA} = 1.6$$

(2) At location B at end of keyway:

$$K_{tB} = 1.426 + 0.1643 \left(\frac{0.1}{r/D} \right) - 0.0019 \left(\frac{0.1}{r/D} \right)^2$$

$$\text{where } 0.005 \leq r/D \leq 0.04$$

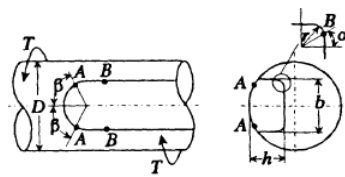
$$D \leq 6.5 \text{ in.}$$

$$h/D = 0.125$$

 For $D > 6.5$ in., it is suggested that the K_{tB} values for $r/D = 0.0208$ be used.

a)

b. Torsion



$$h = \frac{1}{8}D, \quad b = D/r, \quad \alpha = 15^\circ, \quad \beta = 50^\circ$$

(1) At location A on surface:

$$K_{tA} = \sigma_{\max}/\tau \simeq 3.4, \quad \tau = 16T/\pi D^3$$

(2) At location B in fillet:

$$K_{tB} = \sigma_{\max}/\tau$$

$$= 1.953 + 0.1434 \left(\frac{0.1}{r/D} \right) - 0.0021 \left(\frac{0.1}{r/D} \right)^2$$

$$\text{for } 0.005 \leq r/D \leq 0.07$$

b)

Slika A. 11. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani utor za pero na okruglom vratilu pri a) savijanju, b) uvijanju

Kazalo pojmova

A

aksijalni

moment otpora presjeka 53, 58

moment tromosti presjeka 15, 58

analogno opterećenje 25

Č

čvrstoća 62-66, 69, 70, 72, 79, 82-93, 96

dinamička 82-85, 88, 89-93, 95, 96

krivulja 64, 65

statička 83, 84, 87, 92

teorije 62, 89, 90

uvjet 63-65, 70, 72, 76, 79

vremenska 83, 84

D

diferencijalna jednadžba elastične linije 15-17, 20, 21, 30, 34

dijagram

Haighov 83, 84

momentni – grede 24, 25, 28

Smithov 83, 85, 89, 92

Wöhlerov 83, 84

dimenzioniranje 53, 67, 77, 79, 89, 93, 96

E

energija deformiranja

dilatacijska 62, 63

distorzijska 62, 63, 65, 66-69, 72, 74, 89

Eulerova kritična sila izvijanja 40-44

F

faktor asimetričnosti ciklusa 82-85

G

Gerberov zglob 25, 27, 28

glavne osi tromosti 41, 56, 63

granica elastičnosti 51, 63, 92, 96

proporcionalnosti 42, 51

tečenja 53, 64, 84

greda 24, 25, 28, 31, 33, 43-45

analogna 23-29

I

integriranje 16-21, 23, 28, 30, 34

izvijanje 39-51

K

koordinatni sustav 15, 64

kritična

naprezanje 41-47, 49-50

sila 40-42

kruto tijelo 39

kut nagiba tangente na elastičnu liniju 18, 26, 28, 31

M

moment

ekvivalentni 69, 77, 78

savijanja 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30-34, 37-40, 53, 55, 56, 68, 72, 76-79, 90, 93, 95

uvijanja 53, 54, 67, 69, 71-73, 78, 79, 89-91, 95

N

naprezanje

amplituda 82-84, 90, 93

dopušteno 47, 49, 50, 63, 64, 72, 85, 89, 91, 92, 94

ekvivalentno 62, 63, 65, 69, 70, 72-76, 89

faktor 86, 87, 92-104

koncentracija 52, 82, 85, 86, 88, 89, 92, 93

neproporcionalno 90

normalno 51-53, 56-64, 66, 69, 71-73, 76, 95

posmično 53, 54, 58, 62, 65-79, 89

srednja vrijednost 82, 83, 89, 93

tenzor 63

neprekidnost (kontinuiranost) 21, 22

Neuberova jednadžba 87

O

opterećenje 16, 20, 23-25, 27-34, 36, 44
 aktivno 30, 32-34
 analogno 25
 fiktivno 23
 promjenjivo 81
 proporcionalno 89, 90
 raspodijeljeno 16, 17, 20, 23-25, 27-31, 34, 44
 složeno 51, 67, 89
 uzdužno (osno, aksijalno) 52, 57, 71
 osovina 81, 83, 93-95

P

plastična deformacija (tečenje) 30, 32, 62, 64, 84, 91
 polarni moment
 otpora presjeka 53
 tromosti presjeka 58
 pomak 15-17, 19, 25, 28, 30, 40, 62
 presjek
 kritični 54, 56, 57, 69, 76, 77, 89, 96
 oprečni 15, 16, 40, 88
 progib 15-16, 19-25, 27, 28, 30-32, 34, 36, 37, 40, 41
 funkcija 19, 20, 22, 32, 36

R

raspon 15
 ravnoteža 17, 18, 25-27, 30, 33, 39, 40, 44, 45, 47, 71, 78, 95
 indiferentna 39
 labilna 39, 40
 stabilna 39, 40

rubni uvjet 17-19, 21-25

pomaka 17, 19
 sila 17

S

savijanje 15, 51-54, 56, 57, 67, 72, 85, 90, 95, 100
 čisto 15
 tankih štapova 15
 savojna krutost 17, 24, 28
 sila
 bočna 46
 uzdužna 39, 40, 44, 51, 57, 71, 72, 89
 poprečna 16-18, 20, 23-26, 28, 29, 30, 32, 53, 79, 81, 90
 središnja linija 15
 središnjica 39, 54, 55, 68, 73
 statički neodređen nosac 30-33

T

Tetmayerova kritična sila izvijanja 42

U

uvijanje 51, 53, 54, 57, 67, 71, 72, 85, 88-90, 95

V

visina 24
 savijanja 15
 štapa 15
 vratilo 54-56, 67-69, 78-82, 90, 91, 95, 96
 idealno 78-80, 83-84

Z

zakrivljenost 15, 16, 23, 39, 40, 71, 87

Popis slika i tablica

Slika 1.1. Opisivanje deformiranja nosača: a) koordinatni sustav nosača [1], b) pomak (progib) nosača.....	16
Slika 1.2. Zakrivljenost elastične linije [1].....	16
Slika 1.3. Konzolni nosač.....	17
Slika 1.4. Unutrašnje veličine na lijevom rubu konzole.....	18
Slika 1.5. Normirana funkcija progiba konzole.....	19
Slika 1.6. Konzolni nosač.....	20
Slika 1.7. Raspodjela momenta savijanja.....	21
Slika 1.8. Neprekidnost funkcije i prve derivacije progiba.....	22
Slika 1.9. Normirani progib konzole.....	23
Slika 1.10. Analogni rubni uvjeti.....	24
Slika 1.11. Greda opterećena spregom.....	24
Slika 1.12. Pretpostavljene reakcije grede.....	25
Slika 1.13. Momentni dijagram grede.....	25
Slika 1.14. Opisivanje grede analognom gredom.....	25
Slika 1.15. Reakcije u osloncima analogne grede.....	26
Slika 1.16. Ravnoteža središnjeg dijela analogne grede.....	26
Slika 1.17. Poprečna sila u zglobovima A analognog nosača.....	26
Slika 1.18. Ravnoteža dijela analognog nosača lijevo od točke A: a) vanjske reakcije na dio nosača, b) unutrašnji moment savijanja.....	26
Slika 1.19. Greda opterećena raspodijeljenim opterećenjem.....	27
Slika 1.20. Ravnoteža lijevog dijela grede.....	27
Slika 1.21. Ravnoteža desnog dijela grede.....	27
Slika 1.22. Momentni dijagram grede.....	28
Slika 1.23. Raspodijeljeno opterećenje analogne grede.....	28
Slika 1.24. Fiktivni moment u presjeku B.....	29
Slika 1.25. Poprečna sila: a) reakcija u lijevom osloncu analogne grede, b) unutrašnja poprečna sila.....	29
Slika 2.1. Linearost progiba o sili i momentu.....	30
Slika 2.2. Greda dva puta statički neodređena.....	31
Slika 2.3. Dijagram momenta savijanja.....	32
Slika 2.4. Dva načina opisivanja nosača statički određenim nosačima; a) opisivanje konzolama, b) opisivanje gredama na dva oslonca.....	33
Slika 2.5. Opisivanje pomoću statički određenog nosača: a) uklanjanje prekobrojne veze, b) aktivno opterećenje, c) prekobrojni spreg, d) prekobrojna sila.....	33
Slika 2.6. Konzola opterećena aktivnim opterećenjem.....	34
Slika 2.7. Konzola opterećena prekobrojn timer spregom.....	35

Slika 2.8. Konzola opterećena prekobrojn timer silom.....	36
Slika 2.9. Elastična linija pojedinih reakcija i opterećenja	37
Slika 2.10. Elastična linija nosača	37
Slika 2.11. Dijagrami momenta savijanja pojedinih opterećenja i cijelog nosača.....	38
Slika 3.1. Valjak u tri stanja ravnoteže [1]	39
Slika 3.2. Tri stanja ravnoteže štapa opterećenog uzdužnom tlačnom silom [1].....	39
Slika 3.3. Štap opterećen na izvijanje: a) geometrija, b) deformirani oblik, c) unutrašnji moment savijanja u deformiranom stanju.....	41
Slika 3.4. Slobodne duljine izvijanja: a) dva zglobna oslonca, b) uklještenje i slobodan kraj, c) uklještenje i zglobni oslonac, d) dva uklještenja	42
Slika 3.5. Kritično naprezanje pri izvijanju ovisno o vitkosti štapa	43
Slika 3.6. Štap opterećen na izvijanje u konstrukciji.....	43
Slika 3.7. Ravnoteža grede u konstrukciji	44
Slika 3.8. Štap opterećen na izvijanje u konstrukciji.....	45
Slika 3.9. Štap između dva uklještenja	46
Slika 3.10. Sile na klinovima.....	47
Slika 3.11. Štap opterećen na izvijanje povišenjem temperature	48
Slika 3.12. Izračunavanje reakcije pri zagrijavanju štapa.....	49
Slika 3.13. Štap s uklještenjem opterećen na izvijanje	50
Slika 4.1. Složeno opterećen štap: a) geometrija i opterećenje, b) reducirano opterećenje na težišnicu, c) komponente naprezanja, d) ukupno naprezanje.....	51
Slika 4.2. Vijčana preša	52
Slika 4.3. Raspodjela naprezanja u stupu vijčane preše	53
Slika 4.4. Štap opterećen na savijanje i uvijanje.....	53
Slika 4.5. Stanje naprezanja u točki A.....	53
Slika 4.6. Vratilo opterećeno na savijanje i uvijanje	54
Slika 4.7. Rezultirajuća opterećenja na vratilu	55
Slika 4.8. Momenti savijanja i uvijanja	55
Slika 4.9. Raspodjela naprezanja po presjeku uslijed savijanja.....	56
Slika 4.10. Komponente naprezanja uslijed savijanja i uvijanja	57
Slika 4.11. Prostorni konzolni nosač	57
Slika 4.12. Lokalni koordinatni sustavi na konzoli	58
Slika 4.13. Dijagrami unutrašnjih veličina: a) na dijelu duljine L_3 , b) na dijelu duljine L_2 , c) na dijelu duljine L_1	59
Slika 4.14. Raspodjela naprezanja po presjeku uslijed savijanja.....	60
Slika 5.1. Deformiranje elementarnog volumena materijala [1]	62
Slika 5.2. Ploha tečenja [1]: a) krivulja tečenja, b) teorija najvećeg normalnog naprezanja.....	64
Slika 5.3. Krivulja tečenja teorije najveće duljinske deformacije	65
Slika 5.4. Krivulja tečenja teorije najvećeg posmičnog naprezanja	65
Slika 5.5. Krivulja tečenja teorije najveće distorzijske energije.....	66

Slika 5.6. Vratilo opterećeno na savijanje i uvijanje	67
Slika 5.7. Opterećenja na vratilu	68
Slika 5.8. Momenti savijanja i uvijanja za vratilo	68
Slika 5.9. Komponente naprezanja u materijalu vratila: a) pozitivno normalno naprezanje, b) negativno normalno naprezanje	69
Slika 5.10. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, tlačnom silom i momentom uvijanja	71
Slika 5.11. Naprezanje u stijenci cijevi [3]: a) izračunavanje cirkularnog naprezanja, b) stanje naprezanja u stijenci cijevi.....	71
Slika 5.12. Tankostjena cijev opterećena unutrašnjim tlakom, momentima savijanja i uvijanja	72
Slika 5.13. Stanje naprezanja na dijametralno suprotnim mjestima na cijevi	73
Slika 5.14. Raspodjela naprezanja uslijed savijanja	74
Tablica 5.1. Usporedba ekvivalentnih naprezanja za različite geometrije cijevi	76
Slika 5.15. Prostorni konzolni nosač	77
Slika 5.16. Vratilo opterećeno silama	78
Slika 5.17. Dijagrami momenata savijanja i uvijanja za vratilo	79
Slika 5.18. Idealno vratilo, a) realan prikaz, b) promjeri dvostruko uvećani	80
Slika 6.1. Rotiranje osovine na dva oslonca: a) položaj 0°, b) položaj 90°, c) položaj 180°, d) položaj 270°	81
Slika 6.2. Promjena naprezanja pri rotiranju osovine na dva oslonca.....	81
Slika 6.3. Lomovi uslijed umora materijala: a) koljenasto vratilo, b) pedala, c) spojnica, d) štap čekića.....	82
Slika 6.4. Ciklus naprezanja	82
Slika 6.5. Wöhlerovi dijagrami: a) oznaka dinamičke čvrstoće, b) oznaka vremenske i dinamičke čvrstoće, c) u log-log mjerilu	84
Slika 6.6. Haighovi dijagrami: a) osnovni prikaz, b) označeno šrafirano područje bez plastične deformacije, c) shematiziran	84
Slika 6.7. Smithov dijagram	85
Slika 6.8. Shematiziran Smithov dijagram.....	85
Slika 6.9. Raspodjela naprezanja u štapu: a) jednolika raspodjela, b) nejednolika raspodjela zbog koncentracije naprezanja	86
Slika 6.10. Raspodjela naprezanja u štapu: a) jednolika raspodjela, b) raspodjela naprezanja na naglom proširenju A-A, c) nominalno i maksimalno naprezanje.....	86
Slika 6.11. Zarezna osjetljivost prema H. Neuberu [9] za savijanje i osno opterećenje, $r = -1$	87
Slika 6.12. Zarezna osjetljivost prema H. Neuberu [9] za uvijanje, $r = -1$	88
Slika 6.13. Faktor površinske obrade [16]	88
Slika 6.14. Faktor veličine dijela [16]	89
Slika 6.15. Štap proporcionalno opterećen: a) geometrija i opterećenje, b) komponente naprezanja.....	90
Slika 6.16. Štap neproporcionalno opterećen: a) geometrija i opterećenje, b) komponente naprezanja.....	90
Slika 6.17. Ploča spojena vijcima za okolinu opterećena dinamičkom silom: a) geometrija i opterećenje, b) geometrija vijka	92
Slika 6.18. Shematiziran Smithov dijagram za čelik za vijke 12.9	92

Slika 6.19. Osovina na dva ležaja opterećena silama	93
Slika 6.20. Dijagram momenta savijanja osovine	93
Slika 6.21. Vratilo s prirubnicom i tarenicom	95
Slika 6.22. Momenti savijanja i uvijanja za vratilo	95
Slika A. 1. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri rastezanju	97
Slika A. 2. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri uvijanju	97
Slika A. 3. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri savijanju	98
Slika A. 4. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri rastezanju	98
Slika A. 5. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri savijanju	99
Slika A. 6. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [9] pri uvijanju	99
Slika A. 7. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [29] za usjek u štapu: a) rastezanje, b) savijanje, c) uvijanje.....	100
Slika A. 8. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [29] za prijelaz promjera štapa: a) rastezanje, b) savijanje, c) uvijanje.....	101
Slika A. 9. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani polukružni utor na okruglom vratilu pri savijanju	102
Slika A. 10. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani polukružni utor na okruglom vratilu pri uvijanju.....	103
Slika A. 11. Teorijski faktor koncentracije naprezanja [22] za glodani utor za pero na okruglom vratilu pri a) savijanju, b) uvijanju	104

Literatura

- [1] AlfIREVIĆ, I.: *Nauka o čvrstoći I*, Tehnička knjiga d.d., Zagreb, 1995.
- [2] AlfIREVIĆ, I.: *Nauka o čvrstoći II*, Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [3] AlfIREVIĆ, I.: *Linearna analiza konstrukcija*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb 1998.
- [4] Bazjanac, D.: *Nauka o čvrstoći*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1973.
- [5] Brčić, V.: *Otpornost materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1982.
- [6] Brnić, J.: *Mehanika i elementi konstrukcija*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.
- [7] Brnić, J. Turkalj, G.: *Nauka o čvrstoći II*, Zigo Rijeka, Rijeka, 2006.
- [8] Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A.: *Matematički priručnik za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
- [9] Budynas, R. G., Nisbett, K. J.: *Shigley's Mechanical Engineering Design*, Ninth Edition, McGraw-Hill, New York 2011.
- [10] Case, J., Chilver, A. H., Ross, C. T. F.: *Strenght of Materials and Structures*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1984.
- [11] Decker, K.-H.: *Elementi strojeva*, 2. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb
- [12] Den Hartog, J. P.: *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [13] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S.: *Numerička analiza*. Predavanja i vježbe, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2003. http://web.math.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf
- [14] Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Wriggers, P.: *Technische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [15] Grubišić, R.: *Teorija konstrukcija*. Primjeri statičke analize elemenata, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1998.
- [16] Grupa autora: *Inženjerski priručnik IP1*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [17] Jecić, S., Semenski, D.: *Jednadžbe teorije elastičnosti*, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2001.
- [18] Kreyszig, E.: *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley, New York, 1993.
- [19] Leyer, A.: *Maschinenkonstruktionslehre*, Birkhauser Verlag, Basel, Switzerland, Machine Design, Blackie & Son, London, 1974.
- [20] Neuber, H.: *Theory of Stress Concentration for Shear Strained Prismatic Bodies with Nonlinear Stress-Strain Law*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 28, Ser. E, No. 4., 1961, pp. 544–550.
- [21] Neuber, H.: *Theory of Notch Stresses*, Office of Technical Services, U.S. Department of Commerce, Washington, DC, 1961.
- [22] Pilkey, W.D., Pilkey, D.F.: *Peterson's stress concentration factors*, Third Edition, Wiley, New York, 2007.
- [23] Pustaić, D., Tonković, Z., Wolf, H.: *Mehanika deformabilnih tijela*; 1. Mehanika konstrukcija, 2. Čvrstoća elemenata konstrukcija, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2014.
- [24] Šimić, V.: *Otpornost materijala I*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.
- [25] Šimić, V.: *Otpornost materijala II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [26] Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.: *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGraw - Hill, New York, 1970.
- [27] Timošenko, S. P.: *Otpornost materijala II*, Građevinska knjiga, Beograd, 1956.
- [28] Tonković, Z.: *Zamor konstrukcije*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet Strojarsstva i Brodogradnje
- [29] Young, C. W., Budynas, G., R.: *Roark's Formulas for Stress and Strain*, Seventh Edition, McGraw - Hill, New York, 2002.
- [30] <http://www.n56ml.com/corvair/crankshaft/05062401m.jpg>
- [31] <http://de.wikipedia.org/wiki/Rastlinien>

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_T^2} = \frac{1}{2} \left(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{M_{B,rez}}{W} \pm \sqrt{\left(\frac{M_{B,rez}}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_T}{2W}\right)^2} \right) = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} \pm \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right).$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} + \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right); \sigma_2 = \frac{1}{2W} \left(M_{B,rez} - \sqrt{(M_{B,rez})^2 + (M_T)^2} \right).$$

